

Vorlesungsskript

zum Selbststudium
der Vorlesung

Technische Strömungslehre

Dr.-Ing. Uwe Borchert



**Fluidenergiermaschinen
und Energieanlagen**

Berechnung – Auslegung – Beratung

www.fe-bab.de/stro

1. Mrz 2020

Inhalt

Literaturhinweis	4
Nomenklatur	4
Lateinische Formelzeichen.....	4
Griechische Formelzeichen	6
Indizes und Apostrophierungen.....	7
Kennzahlen.....	7
1 Eigenschaften von Fluiden.....	1-1
1.1 Vorbetrachtungen	1-1
1.2 Dichte, Kontinuität der Masse.....	1-4
1.3 Massenstrom und Volumenstrom.....	1-7
1.4 Eigenschaften von Fluiden.....	1-10
2 Druck.....	2-1
3 Hydrostatik.....	3-1
3.1 Grundgleichung der Hydrostatik	3-1
3.2 Anwendung der hydrostatischen Grundgleichung	3-2
3.2.1 <i>Pascalsches Paradoxon</i>	3-2
3.2.2 <i>Druckverlauf in kommunizierenden Röhren</i>	3-3
3.2.3 <i>Hydraulische Presse</i>	3-4
3.2.4 <i>U-Rohr-Manometer zur Messung des Gasdruckes</i>	3-5
3.2.5 <i>Flüssigkeitsschichten</i>	3-6
3.3 Statischer Auftrieb.....	3-7
3.3.1 <i>Archimedisches Prinzip</i>	3-7
3.3.2 <i>Stabilität schwimmender Körper</i>	3-11
3.4 Kräfte auf Behälterwände	3-13
4 Dynamik der Fluide – Beschreibung von Strömungen	4-1
5 Viskosität und Oberflächenspannung	5-1
5.1 Viskosität	5-1
5.2 Die Oberflächen- bzw. die Grenzflächenspannung.....	5-3
5.3 Kapillareffekte in der Fluidstatik	5-8

6	Massenerhaltung	6-1
7	Energiesatz (1. HS)	7-1
7.1	Allgemeiner Energiesatz	7-1
7.2	Inkompressible reibungslose Strömung (Bernoulli-Gleichung).....	7-3
7.2.1	<i>Geschwindigkeits-, Druck-, Höhenform</i>	7-3
7.2.2	<i>Anwendung der Energie-Gleichung</i>	7-4
7.3	Inkompressible reibungslose Strömung mit Energiezufuhr	7-12
7.3.1	<i>Spezifische Stutzenarbeit</i>	7-12
7.3.2	<i>Arbeitsmaschinen in der Rohrströmung (Pumpe)</i>	7-13
7.3.3	<i>Kraftmaschinen in der Rohrströmung (Turbine)</i>	7-16
7.4	Inkompressible reibungsbehaftete Strömung ohne Energiezufuhr.....	7-18
7.5	Reibungsbehaftete Rohrströmung	7-20
7.5.1	<i>Druckverlust in Rohrleitungen bei laminarer Strömung</i>	7-20
7.5.2	<i>Rohrreibungszahl (Widerstandszahl)</i>	7-23
7.5.3	<i>Druckverluste in Rohrelementen – Verlustkoeffizient</i>	7-24
8	Impulssatz für stationäre Strömungen	8-1
8.1	Definition des Impulses	8-1
8.2	Stützkraftkonzept zur Berechnung der Stützkraft.....	8-2
8.3	Newton-Kräftegleichgewicht zur Berechnung der Haltekräfte (Auflagekräfte)	8-4
8.4	Handhabung und Berechnungssystematik.....	8-6
8.5	Anwendungen des Impulssatzes	8-6
8.5.1	<i>Strömungskräfte an Rohrteilen</i>	8-6
8.5.2	<i>Strahlkräfte</i>	8-6
8.5.3	<i>Strahltriebwerke, Propellerschub, Windkraftanlagen</i>	8-7
8.5.4	<i>Rückstoßkräfte</i>	8-11
8.5.5	<i>Mischvorgänge (siehe Übungsmanuskript)</i>	8-11
9	Impulsmomentensatz (Drehimpuls, Drallsatz)	9-1
10	Grundlegende Strömungserscheinungen	10-1
10.1	Vorbetrachtungen (Turbulenz).....	10-1
10.2	Reynolds-Zahl	10-4
10.3	Die Grenzschicht (Reibungsschicht)	10-5
10.4	Umströmung von Körpern.....	10-10
10.4.1	<i>Widerstand und dynamischer Auftrieb</i>	10-10

10.4.2 Grundlagen der praktischen Tragflügeltheorie	10-13
10.5 Widerstand der längsangeströmten Platte	10-18
10.6 Ablösung	10-20
10.7 Umströmung einer Kugel	10-22
10.7.1 Schleichende Strömung um eine Kugel in einer reibungsbehafteten Flüssigkeit – Widerstandskraft	10-25
10.7.2 Kugelumströmung in einer reibungslosen Flüssigkeit	10-29
10.7.3 Kraft auf die Kugel in einer reibungslosen Flüssigkeit	10-30

Literaturhinweis

Becker, E.:	<i>Technische Strömungslehre</i>
Becker, E., Piltz, E.	<i>Übungen zur technischen Strömungslehre</i>
Eppler, R.	<i>Strömungsmechanik</i>
Gersten, K.	<i>Einführung in die Strömungsmechanik</i>
Prandtl, L., Oswatitsch, K.	<i>Führer durch die Strömungslehre</i>
Schlichting, H.	<i>Grenzschicht-Theorie</i>
White, F.M.	<i>Fluidmechanics</i>
Zierep, J.	<i>Grundzüge der Strömungslehre</i>
Böswirth, L.	<i>Technische Strömungslehre</i>
Bohl, W.; Elmendorf, W.	<i>Technische Strömungslehre</i>
Kuhlmann, h.	<i>Strömungsmechanik</i>
Durst, F.	<i>Grundlagen der Strömungsmechanik</i>
Spurk, J. H.	<i>Strömungsmechanik</i>
Iben, H. K.	<i>Strömungslehre in Fragen und Aufgaben</i>

Nomenklatur

Lateinische Formelzeichen

A	– Querschnittsfläche	$[m^2]$
c	– Absolutgeschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$
c_p	– spezifische isobare Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$

c_v	– spezifische isochore Wärmekapazität	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right]$
c_W	– Widerstandsbeiwert	[-]
d	– Durchmesser	[m]
e	– Energiedichte	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}, \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$
E	– Energie	[J]
\dot{E}	– Energiestrom	[W]
F	– Kraft	[N]
g	– Erdbeschleunigung	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
G	– Gewichtskraft	[N]
h	– spezifische Enthalpie	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right]$
	– Höhe	[m]
H	– Enthalpie	[J]
	– geodätische Höhe	[m]
	– Fallhöhe	[m]
I	– Impuls	[N s]
\dot{I}	– Impulsstrom	[N]
L	– Drall, Drehimpuls	$[\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}]$
k_s	– Rauigkeitshöhe	[m]
m	– Masse	[kg]
\dot{m}	– Massenstrom	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]$
P	– Leistung	[W]
p	– Druck	[Pa]
p'	– dimensionsloser Druck	[-]
Δp	– Druckdifferenz	[Pa]
Δp_V	– Druckverluste	[Pa]
q	– kinetischer Druck	[Pa]
Q	– Wärmemenge	[J]
\dot{Q}	– Wärmestrom	$\left[\frac{\text{J}}{\text{s}}\right]$
r	– Radius	[m]
	– Ortsvektor	[-]

R_s	– spezifische Gaskonstante	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right]$
s	– spezifische Entropie	[J]
t	– Zeitkoordinate	[s]
T	– Temperatur	[K]
u	– spezifische Innere Energie	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right]$
	– Umfangsgeschwindigkeit	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
U	– Innere Energie	[J]
v	– spezifisches Volumen	$\left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}\right]$
V	– Volumen	$[\text{m}^3]$
\dot{V}	– Volumenstrom	$\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right]$
w	– Strömungsgeschwindigkeit	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
w_t	– spezifische technische Arbeit	$\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$
W	– Arbeit	[J]
x	– Raumkoordinate	[-]
y	– Raumkoordinate	[-]
z	– Raumkoordinate	[-]
z	– geodätische Höhe	[m]

Griechische Formelzeichen

β_T	– Kompressibilitätskoeffizient	[-]
γ	– Anstellwinkel	[°]
δ	– Grenzschichtdicke	[mm]
ζ	– Widerstandsbeiwert	[-]
η	– dynamische Viskosität	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\right]$
	– Wirkungsgrad	[-]
κ	– Isentropenexponent	[-]
λ	– Rohrreibungsbeiwert	[-]
ν	– kinematische Viskosität	$\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$
ξ	– dimensionslose Winkelgeschwindigkeit	[-]

ρ	– Dichte	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
σ	– Oberflächenspannung	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}\right]$
τ	– Schubspannung	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
φ	– spezifische technische Dissipation	$\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$
ω	– Winkelgeschwindigkeit	$[\text{s}^{-1}]$

Indizes und Apostrophierungen

0	– Umgebung
1,2,3	– Ort für die Betrachtung der Strömung
<i>abs</i>	– absolut
<i>A</i>	– Auftrieb
<i>D</i>	– Druck
<i>Fl</i>	– Flüssigkeit
<i>K</i>	– Körper
<i>L</i>	– links
<i>p</i>	– Druck
<i>R</i>	– rechts – Reibung
<i>sch</i>	– scheinbar
<i>U</i>	– Unter-... (z. B. Unterdruck)
<i>u</i>	– Umgebung
<i>Ü</i>	– Über-... (z. B. Überdruck)

Kennzahlen

<i>Bo</i>	– Bond-Zahl	$[-]$
<i>Ma</i>	– Mach-Zahl	$[-]$
<i>Re</i>	– Reynolds-Zahl	$[-]$

1 Eigenschaften von Fluiden

1.1 Vorbetrachtungen

Was ist ein Fluid?

Die Strömungsmechanik befasst sich mit dem Verhalten von fließfähiger Materie (Fluide) unter dem Einfluss von mechanischen Kräften. Im engeren Sinne handelt es sich bei der fließfähigen Materie um Flüssigkeiten (kondensierte, tropfbare Materie) und Gase. Als fließfähig erweisen sich aber auch Festkörperschüttungen (Granulate, Stäube) oder – in Anwesenheit hinreichend großer mechanischer Belastung – feste Bauelemente. Die Beschreibung der letztgenannten Fließvorgänge wird klassisch als Domäne der Rheologie bzw. der Plastomechanik angesehen. Hier soll nur das Verhalten von Gasen und tropfbaren Flüssigkeiten betrachtet werden.

Die *Strömungsmechanik* (auch als Fluidmechanik bezeichnet) stellt ein Teilgebiet der *Technischen Mechanik* dar. Diese wiederum repräsentiert einen Teil der Physik. Die Mechanik ist die Wissenschaft, die sich mit Kräften sowie mit Wirkungen von Kräften auf Körper und Stoffen aller Art befasst. Die beobachteten Objekte können dabei sowohl in Ruhe als auch in Bewegung sein. In der Lehrveranstaltung *Technische Mechanik* werden die diesbezüglichen Grundsachverhalte behandelt.

Die Strömungsmechanik, die sich erst im letzten Jahrhundert zu einer selbständigen Wissenschaft entwickelte, erforscht die Gesetzmäßigkeiten der Bewegungen und des Kräftegleichgewichtes sowohl von ruhenden als auch von bewegten Fluiden. Man spricht von der Statik der Fluide, wenn die am Fluid angreifenden Kräfte zu einem verschwindenden Geschwindigkeitsvektor $w = 0$ führen. Demgemäß bedeutet der Fall der Ruhe die schärfste Einschränkung in der Kinematik. Dieses Teilgebiet befasst sich (wie in der Technischen Mechanik dargelegt) mit der Beschreibung der Bewegung, ohne nach deren Ursache zu fragen. Die Gesetze der Fluidstatik lassen sich insbesondere auch auf rotierende Systeme übertragen, in denen das Fluid im mitrotierenden System ruht.

Die Hydrostatik studiert das Verhalten von tropfbaren Flüssigkeiten, welche sich durch große Volumenbeständigkeit bzw. geringe Kompressibilität auszeichnen. Indessen befasst sich die Aerostatik mit gas- oder dampfförmigen Medien in einem solchen (thermodynamischen) Zustand, bei dem sie sich leicht zusammendrücken lassen.

Als Idealisierung des physikalischen Verhaltens spricht man von **inkompressibel**, wenn das Medium einer Volumenänderung einen großen Widerstand entgegensetzt. Diese Aussage betrifft auch die Fluidodynamik: Als **kompressibel** werden die Fluide dann betrachtet, wenn die Strömungskinetik bzw. -kräfte zu einer Dichteänderung führen.

Die weitgehende Bedeutung der Strömungsmechanik ist offenkundig. Immer wenn sich Systeme in Fluiden (z. B. Fahrzeuge, Schiffe, Flugzeuge), oder Fluide in Systemen (z. B. Rohrleitungen, Strömungsmaschinen) bewegen, erfüllen sie die Strömungsgesetze.

Unter den Begriffen **Hydraulik** (Fluid: Flüssigkeit, meist Öl) und **Pneumatik** (Fluid: Luft) werden heute Techniken verstanden, die „Kraftbewegungen“ verwirklichen und steuern. Sie werden auch zusammengefasst unter den Begriffen Fluidik oder Fluidtechnik. Diese beiden Gebiete sind nicht Gegenstand dieses Skriptums. Tab. 1-1 zeigt die Einteilung der Strömungsmechanik in ihre Unterbereiche.

Tab. 1-1: Einteilung der Strömungsmechanik

	Statik der Fluide (ruhend Fluid)	Dynamik der Fluide (bewegtes Fluid)
Hydromechanik $\rho = \text{const}$	Hydrostatik	Hydrodynamik
Aeromechanik $\rho \neq \text{const}$	Aerostatik	Aerodynamik Gasdynamik

Bei Gasströmungen mit Geschwindigkeiten kleiner als etwa 100 m/s sind die Dichteänderungen so klein, dass man mit konstanter Dichte rechnen und somit die Gesetze der Hydrodynamik anwenden kann.

Die meisten Gesetze der Strömungsmechanik gelten gleichermaßen für Flüssigkeiten und Gase. Der übergeordnete Begriff dafür heißt **Fluid**.

Flüssigkeit → z. B. Wasser } Fluid
Gas → z. B. Luft }

Geschichtliche Entwicklung:

Die Bedeutung der Strömungsmechanik lässt sich auch historisch verfolgen. In der prähistorischen Zeit musste sich der Mensch zwangsläufig mit der Wirkung von Strömungskräften befassen, um etwa geeignete Jagdwaffen, Wasserleitungen und Wassertransportmittel zu bauen. Im klassischen Altertum macht sich der Mensch seine Erkenntnisse über Strömungsvorgänge zunutze, um Schiffe, Bewässerungssysteme und Wasserräder zu entwerfen. Aus dieser Zeit stammen z. B. auch Nivelliergeräte und Spielzeuge. **Archimedes** (287–212 v. Chr.) gelingt die Berechnung des hydrostatischen Auftriebes.

Von den Römern bis zur Renaissance liegen keine wesentlichen Beiträge vor. Im Unterschied hierzu gibt es nach der Renaissance ein überaus breites Spektrum an bahnbrechenden Arbeiten. **Leonardo da Vinci** befasst sich um 1500 mit der Berechnung der Massenerhaltung

sowie mit der Verlustverringerung durch Formgebung. Er studiert des Weiteren die Wellenbewegung, den hydraulischen Sprung und die Strömungsturbulenz sowie das Verhalten von Freistrahlen und Nachlaufströmungen.

Evangelista Torricelli (1608–1647) findet eine mathematische Beziehung zur reibungsfreien Berechnung des Ausflusses einer Flüssigkeit aus einem Gefäß.

Edme Mariotte (1628–1684) realisiert einen ersten Versuchskanal zur Messung des Widerstandes von Körpern in Strömungen.

Isaac Newton (1643–1727) trägt ganz wesentlich zum Verständnis strömungsmechanischer Vorgänge bei. Er postuliert, dass der Fluidwiderstand proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz ist. Als Maß für den Widerstand „normaler“ Fluide (Wasser, Luft) führt er die Viskosität ein. Mit Hilfe der Differentialrechnung berechnet er das Strömungsverhalten eines rotierenden Zylinders.

Daniel Bernoulli (1700–1782) stellt bei seinen Untersuchungen fest, dass zwischen der Druckänderung und der Beschleunigung eines Fluids Proportionalität besteht. Er führt auch den Begriff *Hydrodynamik* ein.

Leonhard Euler (1707–1783) leitet die Grundgleichung der reibungslosen Strömung (Bernoulli-Gleichung) her und führt die Feldbeschreibung ein.

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) macht auf das Paradoxon aufmerksam, dass ein reibungsfrei umströmter Körper der Strömung keinen Widerstand entgegensetzt.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) schlägt vor, eine Strömung durch Verfolgung der einzelnen Teilchenbahnen zu beschreiben.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827) formuliert ein Gesetz, das erlaubt, die Gestalt freier Oberflächen bzw. Fluidgrenzflächen zu berechnen.

Der Berücksichtigung des Einflusses der Reibung in Strömungsfeldern sind Arbeiten aus den Jahren von 1827 bis 1845 von **Claude Louis Marie Henri Navier**, **Augustin-Louis Cauchy**, **Siméon Denis Poisson** und **Jean Claude St. Venant** gewidmet. Diese Verfasser führen eine unbekannte molekulare Funktion zur Beschreibung der Reibung ein. **George Gabriel Stokes** verwendet diesbezüglich die Viskosität.

Osborne Reynolds (1842–1912) studiert die Merkmale der Turbulenz. Die moderne Strömungsmechanik hat ihren Ursprung in Arbeiten von **Ludwig Prandtl** (1875–1953). Mit der von ihm entwickelten Grenzschichttheorie gelingt es, die Konflikte zwischen den Hydraulikern und den theoretischen Strömungsmechanikern zu überbrücken. Die erste Gruppe befasst sich mit technischen Anwendungen und ist häufig darauf angewiesen, empirische Erkenntnisse anzuwenden. Indessen kennen die theoretischen Strömungsmechaniker zwar die Bewegungsgleichungen, aber nur in seltenen Fällen liegen entsprechende Lösungen für praktische Anwendungen vor.

Dieser kurze Abriss kann nicht alle Errungenschaften der Fluidmechanik aufführen. Es sollen hier aber noch kurz einige der zum Teil sehr namhaften Forscher des 20. Jahrhunderts stellvertretend genannt werden.

Albert Einstein (1879–1955) befasst sich in seiner Jugend mit der Bestimmung der Viskosität von Suspensionen. Viel später arbeitet er mit seinen Schülern auf dem Gebiet der Turbulenz.

Taylor, Richarson, Kolmogoroff, Batchelor und **Rotta** tragen wesentlich zur Entwicklung der statistischen Turbulenztheorie bei. **Theodore von Kármán** (1881–1963) publiziert Arbeiten, etwa zum Themenkreis der rotierenden Scheibenströmungen, die inzwischen als klassisch gelten. Die sich hinter einem querangeströmten Zylinder ausbildende Wirbelstrasse ist nach ihm benannt.

Ende der 1960er Jahre werden entscheidende Fortschritte bei der Sichtbarmachung von Strömungen erzielt. Mit entsprechenden Visualisierungstechniken belegt die Gruppe um **Kline** die Existenz kohärenter Strukturen in turbulenten Strömungen. In den 1980er Jahren findet die von **Mandelbrot** entwickelte Fraktaltheorie Einzug in der Turbulenztheorie. Ohne bestimmte Verfasser hervorheben zu wollen, muss festgestellt werden, dass die numerische Simulation von Strömungsprozessen eine zunehmend wichtigere Rolle spielt. Diese Entwicklung lässt sich aber nicht nur auf die starke Zunahme der Leistungen moderner Rechner zurückführen. Vielmehr ist dies eine Folge intensiver Bemühungen im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung numerischer Algorithmen (z. B. die Multilevel-Verfahren).

1.2 Dichte, Kontinuität der Masse

Ein Fluid wird als ein *Kontinuum* angesehen. In einem Kontinuum ist das kleinste betrachtete Volumenelement dV noch immer homogen, d. h. die Abmessungen von dV sind noch groß gegenüber dem mittleren Molekülabstand im Fluid. Die Dichte ρ eines Fluidelements ist definiert als der Kehrwert des **spezifischen Volumens** v [m^3/kg]:

$$\rho = \frac{1}{v} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad \text{Gl. 1-1}$$

Die Dichte ist eine Funktion des Ortes und der Zeit, d. h. $\rho = \rho(x, y, z, t)$ für ein kartesisches Koordinatensystem. Bei veränderlicher Dichte spricht man von **kompressiblen**, bei konstanter Dichte von **inkompressiblen** Fluiden.

Jedes Fluid besitzt eine Masse. Die Dimension der Masse m ist das Kilogramm [kg]. Die Masse beansprucht Raum. Diesen Raum nennen wir das Volumen V , das die Dimension Kubikmeter [m^3] trägt. Die Dichte ist der Quotient aus Masse und Volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad \text{Gl. 1-2}$$

Zwischen der Dichte von Flüssigkeiten und der von Gasen besteht ein riesiger Unterschied, der ungefähr dem Faktor 1000 entspricht.

Zu beachten ist die Abhängigkeit der Dichte vom Druck p und der Temperatur T , die für viele Fluide in Form einer Zustandsgleichung gegeben ist. Für ideale Gase lautet die Gleichung

$$\frac{p}{\rho} = p \cdot v = R_s \cdot T \quad \text{Gl. 1-3}$$

mit der spezifischen Gaskonstante R_s des Gases.

Im Gegensatz zu Gasen weisen Flüssigkeiten nur schwache Abhängigkeiten der Dichte vom Druck und von der Temperatur auf.

Tab. 1-2: Dichte verschiedener Fluide bei 0 °C und 1 bar

Fluid	Dichte ρ [kg/m³]
Helium	0,1785
Wasserdampf	0,768
Stickstoff	1,2505
Sauerstoff	1,4289
Luft	1,2928
Argon	1,784
Kohlendioxid	1,977
Mineralöl	850
Wasser	998,2
Quecksilber	13595,5
	(13546 bei 20 °C)

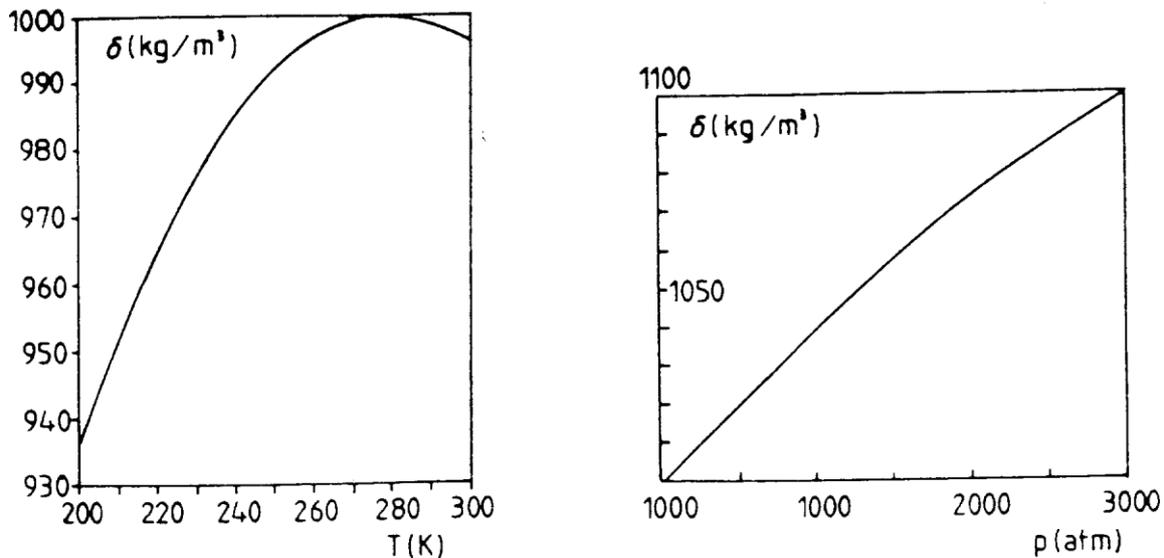


Abb. 1-1: Dichte von Wasser als Funktion der Temperatur T und des Druckes p

Die Stoffgröße ϱ hängt von p und T ab. Demgemäß lässt sich für die Änderung der Dichte schreiben (totales Differential):

$$d\varrho = \left(\frac{\partial\varrho}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial p}\right)_T dp \quad \text{Gl. 1-4}$$

bzw. für die relative Dichteänderung:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial\varrho}{\partial T}\right)_p dT + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial\varrho}{\partial p}\right)_T dp \quad \text{Gl. 1-5}$$

Im Zusammenhang mit den oben gegebenen Erläuterungen interessiert die Änderung der Dichte bei konstanter Temperatur, die durch den Kompressibilitätskoeffizienten β_T mit

$$\beta_T = \frac{1}{\varrho} \cdot \left(\frac{\partial\varrho}{\partial p}\right)_T \quad \text{Gl. 1-6}$$

ausgedrückt wird. An dieser Stelle erweist es sich zunächst als sehr instruktiv, ein ideales Gas zu betrachten. Mithilfe des idealen Gasgesetzes lässt sich für β_T schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varrho = \frac{p}{R_s \cdot T} \rightarrow \left(\frac{\partial\varrho}{\partial p}\right)_T &= \frac{1}{R_s \cdot T} \\ \frac{1}{\varrho} &= \frac{R_s \cdot T}{p} \end{aligned} \right\} \beta_T = \frac{R_s \cdot T}{p} \cdot \frac{1}{R_s \cdot T} = \frac{1}{p} \quad \text{Gl. 1-7}$$

Demgemäß ändert sich die Kompressibilität beim idealen Gas wie der Druck und kann somit eine bedeutende Größenordnung erreichen. Wie Tab. 1-3 belegt, nimmt β_T bei Flüssigkeiten hingegen nur sehr geringe Werte an.

Tab. 1-3: *Kompressibilitätskoeffizienten und Dichte ausgesuchter Materialien (Daten für 1 bar und 0 °C)*

Stoffgröße	Dimension	Wasser	Methanol	Luft	CO ₂
ρ	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	999,8	810	1,275	1,975
$\beta_T \cdot 10^5$	$\frac{\text{m}^2}{\text{N}}$	0,0001	0,0001	1,007	1,007

1.3 Massenstrom und Volumenstrom

Das Fluid bewegt sich vor einem ortsfesten Hintergrund: Es strömt. Wir stellen uns einen ortsfesten, ebenen Ring beliebiger Form vor, dessen Querschnitt A durchströmt wird.

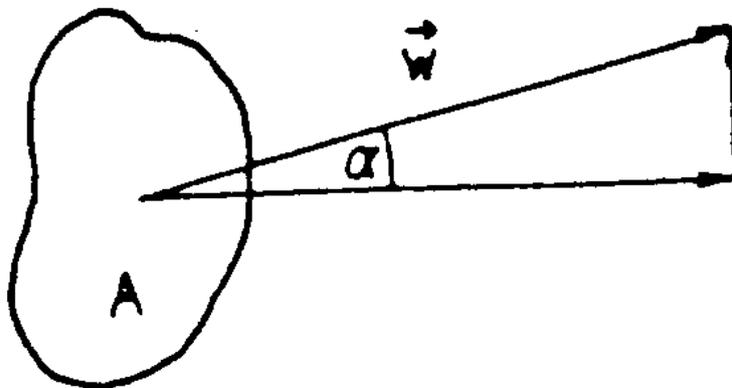


Abb. 1-2: *Strömung durch einen gedachten Querschnitt A*

Wir interessieren uns für die Masse, die pro Zeiteinheit den Querschnitt A durchströmt. Sie ist proportional zu A und zu ρ . Weiter ist sie proportional zur Geschwindigkeit w des Fluids, genauer gesagt, zu der Komponente, mit der das Fluid senkrecht zu A strömt.

$$\dot{m} \sim A \quad \text{Gl. 1-8}$$

$$\dot{m} \sim \rho \quad \text{Gl. 1-9}$$

$$\dot{m} \sim w \cdot \cos \alpha \cdot \rho \cdot A \quad \text{Gl. 1-10}$$

Die andere Komponente liegt in A und kann somit nichts über A fördern. Für den Massenstrom \dot{m} mit der Dimension [kg/s] erhalten wir danach:

$$\dot{m} = w \cdot \rho \cdot A \quad \text{Gl. 1-11}$$

Das Produkt

$$\dot{V} = w \cdot A \quad \text{Gl. 1-12}$$

heißt Volumenstrom und hat die Einheit $[\text{m}^3/\text{s}]$. Somit ist

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \quad \text{Gl. 1-13}$$

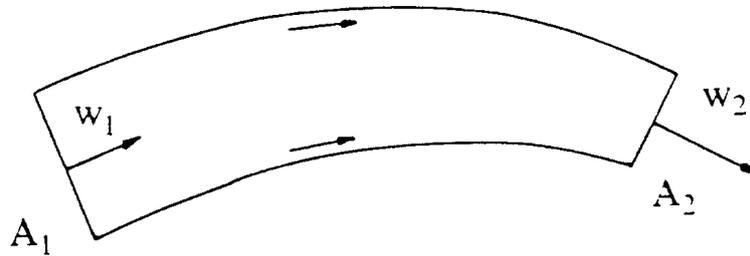


Abb. 1-3: *Stromröhre*

Wir orientieren nun zwei Ringflächen A_1 und A_2 so, dass sie senkrecht zur Strömung stehen. Wir verbinden die beiden Ringe durch eine gedachte Röhre. Das ganze heißt dann Stromröhre.

Das Wesentliche daran ist, dass das Fluid nur entlang der Röhrenwand strömen kann. Wir setzen voraus, dass sich die Strömung über der Zeit nicht verändert (stationäre Strömung), d. h., dass ρ und w an jedem einzelnen Punkt der Röhre konstant bleiben, während sie sich entlang der Röhre ändern können.

Nun muss, da Masse nicht verschwinden oder erzeugt werden kann, diejenige Masse, die pro Zeiteinheit durch A_1 in die Stromröhre eintritt, in derselben Zeiteinheit durch A_2 wieder austreten.

D. h., es gilt:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \text{Gl. 1-14}$$

oder

$$w_1 \cdot \rho_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot \rho_2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 1-15}$$

Wenn sich die Dichte des Fluids auf dem Weg von A_1 nach A_2 nicht ändert, gilt sogar:

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 1-16}$$

D. h., der Volumenstrom bleibt konstant:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad \text{Gl. 1-17}$$

Wenn darüber hinaus auch noch die Querschnitte gleich sind, folgt für die Geschwindigkeit:

$$w_1 = w_2 \quad \text{Gl. 1-18}$$

Beispiel: Spritze

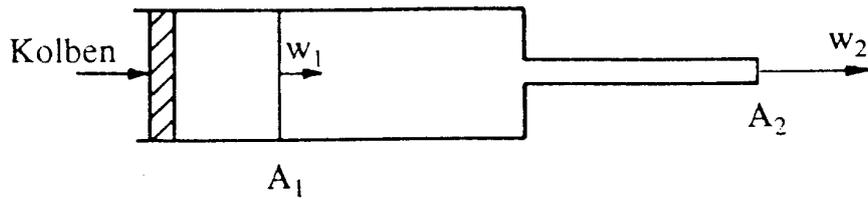


Abb. 1-4: Spritze

Eine Spritze ist eine Stromröhre mit festen Wänden und deutlicher Querschnittsverengung. Für sie gelten Gl. 1-14 und für ein inkompressibles Fluid Gl. 1-17. Da somit

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{Gl. 1-19}$$

folgt aus Gl. 1-15

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{A_2}{A_1} \quad \text{Gl. 1-20}$$

Die Flüssigkeit innerhalb der Spritze ändert ihre Dichte nicht. Stattdessen erhöht sich im verengten Querschnitt die Geschwindigkeit. Wir erhalten für die relative Erhöhung der Geschwindigkeit:

$$\frac{w_2 - w_1}{w_1} = \frac{A_1}{A_2 - A_1} \quad \text{Gl. 1-21}$$

Beispiel: Rohrverzweigung

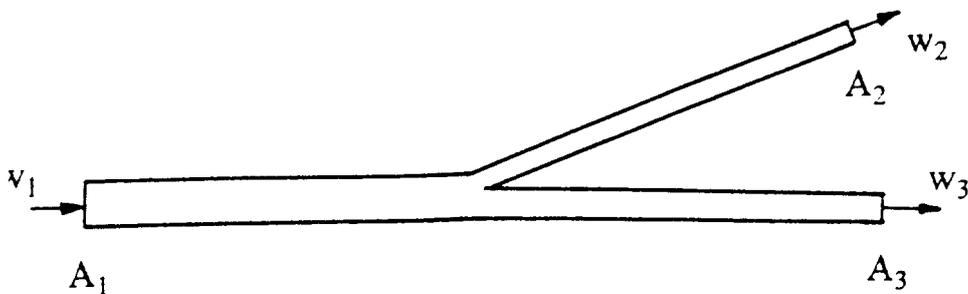


Abb. 1-5: Rohrverzweigung

Eine Stromröhre mit festen Wänden kann sich verzweigen. Die Massenstrombilanz lautet:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad \text{Gl. 1-22}$$

und bei konstanter Dichte:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad \text{Gl. 1-23}$$

Wenn zwei Ströme gegeben sind, lässt sich der dritte ermitteln. Allein aufgrund der Flächenaufteilung der Verzweigung lässt sich allerdings nicht sagen, wie sich die Ströme verteilen.

1.4 Eigenschaften von Fluiden

Die Bewegung in einem Strömungsfeld hängt ganz wesentlich von den Eigenschaften der fließenden Materie ab. Diese Eigenschaften sind die Trägheits- und Schwerkkräfte (durch die Dichte ρ) ebenso wie die Reibungseffekte (Zähigkeit oder Viskosität). Eine weitere wichtige Größe ist die Kompressibilität (Änderung der Dichte bei Druck- oder Temperaturerhöhung). Sie erweist sich als ganz entscheidend hinsichtlich einer Unterscheidung von Gas (kompressibel) und Flüssigkeit (dichtebeständig = inkompressibel).

In diesem Zusammenhang muss aber darauf hingewiesen werden, dass Gase durchaus auch als inkompressibel angesehen werden können, wenn die im Strömungsfeld auftretenden Kräfte zu keiner nennenswerten Kompression führen. Für Luft gilt diese Näherung bis zu Geschwindigkeiten von etwa 100 m/s.

Stoffgrößen und Stofffunktionen

Als Stoffgrößen bezeichnet man solche physikalischen Größen, welche eine Funktion der Temperatur T und des Druckes p darstellen, aber nicht vom Strömungsfeld abhängen. Hingegen liegt eine Stofffunktion vor, wenn die lokale Strömung die physikalische Größe beeinflusst.

Bei Gasen unter mäßigen Drücken und reinen, flüssigen (Newtonschen) Medien lassen sich die Dichte ρ , die Kompressibilität β (siehe Abschn. 1.2) und die dynamische Viskosität η in guter Näherung als Stoffgrößen ansehen. Darüber hinaus stellt die Oberflächenspannung σ eine Stoffgröße dar.

2 Druck



Abb. 2-1: Gasbehälter

Der Druck spielt eine entscheidende Rolle in der Mechanik der Fluide.

$$p = \frac{F}{A} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad \text{Gl. 2-1}$$

p – Druck auf den Kolben (Skalar), A – Fläche des Kolbens

In der Technik werden verschiedene Druckbegriffe verwendet.

$$p_{abs} = p_u + \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow p_{abs} = p_u \pm \Delta p \quad \text{Gl. 2-2}$$

Absolutdruck:

p_{abs} – Absolutdruck (gegenüber dem Druck im leeren Raum), gemessen mit einem Barometer (siehe Abb. 2-2 und Abb. 2-3)

p_u – Umgebungsdruck (Atmosphärendruck – gemessen mit einem **Torricelli**-Barometer), in der Literatur auch als p_0 bezeichnet

Δp – Druckdifferenz $p_{abs} - p_u$, gezeigt durch Manometer: Überdruck (positiv) oder Unterdruck (negativ), gemessen mit einem Manometer (siehe Abb. 2-4)

Absolutdruck = Umgebungsdruck +/- Überdruck/Unterdruck

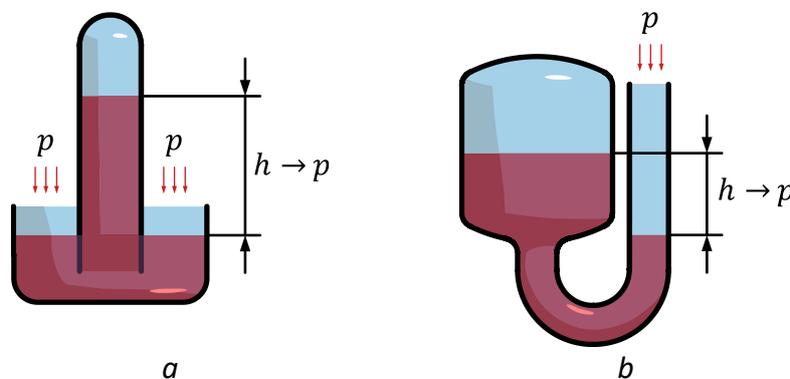


Abb. 2-2: Barometer zur Messung eines Absolutdrucks, a) Flüssigkeitsbarometer nach Torricelli, b) Goethe-Barometer (Flüssigkeitsbarometer)

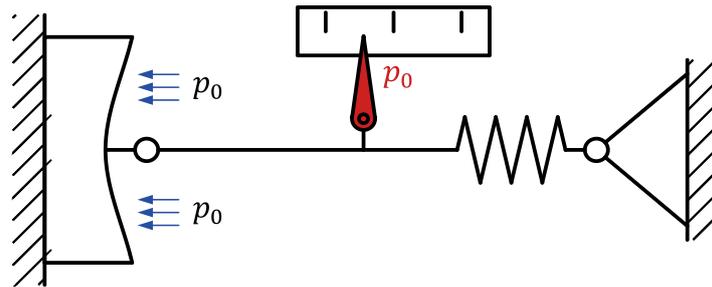


Abb. 2-3: Mechanisches Barometer mit Membrandose

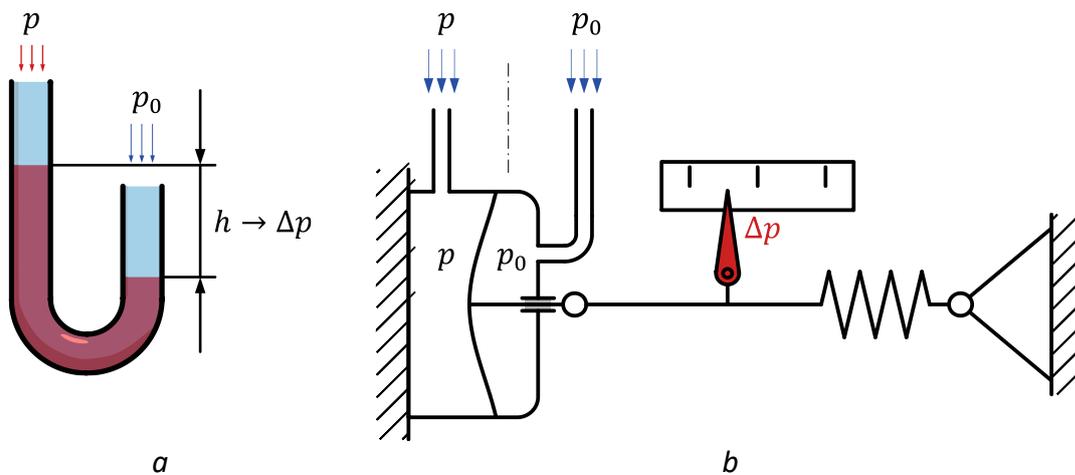


Abb. 2-4: Manometer zur Messung eines Differenzdrucks, a) U-Rohr-Manometer (Flüssigkeitsmanometer), b) mechanisches Manometer mit Membrandose

Einheiten:

$$10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 100\,000 \text{ Pa} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} = 1000 \text{ mbar}$$

$$10,2 \text{ mH}_2\text{O} = 100\,062 \text{ Pa}$$

$$760 \text{ Tor} = 760 \text{ mmHg} = 101\,098 \text{ Pa} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Normatmosphäre:

$$\text{Normaldruck bei } 15 \text{ }^\circ\text{C: } p_u = p_0 = 101\,325 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar} \approx 1 \text{ bar}$$

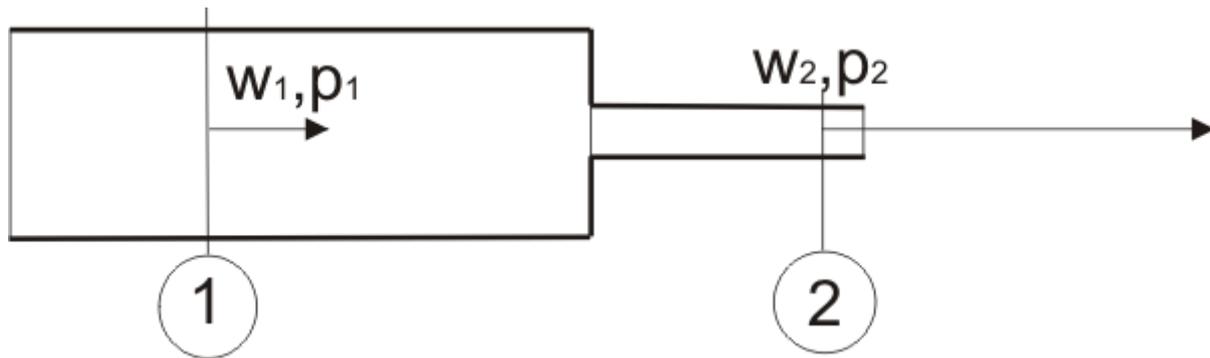


Abb. 2-5: Strömung zwischen zwei Positionen

$$p_1 + \rho \cdot \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \cdot \frac{w_2^2}{2}$$

statische Drücke

 p_1 und p_2

Gl. 2-3

$$\rho \cdot \frac{w_1^2}{2} \text{ und } \rho \cdot \frac{w_2^2}{2}$$

dynamische Drücke

Gl. 2-3 wird in Kap. 7 ausführlich erläutert.

3 Hydrostatik

3.1 Grundgleichung der Hydrostatik

Ein ruhendes inkompressibles homogenes Fluid unter dem Einfluss der Schwerkraftbeschleunigung g . An der Oberfläche herrscht immer der Umgebungsdruck. Die Aufgabe bestehe in der Berechnung des Druckes p .

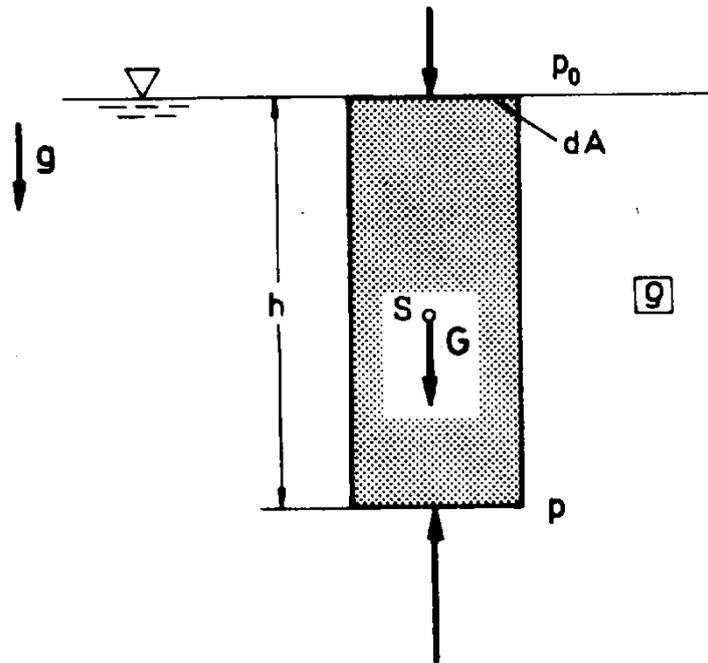


Abb. 3-1: Inkompressibles homogenes Fluid (Gersten: Einführung in die STM)

F_p – Druckkraft

G – Gewichtskraft

Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung:

$$\sum F_{i,z} = m \cdot \ddot{z} \quad \text{Gl. 3-1}$$

$$F_p - m \cdot g - p_0 \cdot A = 0 \quad \text{Gl. 3-2}$$

$$p \cdot A - m \cdot g - p_0 \cdot A = 0 \quad \text{Gl. 3-3}$$

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h \quad \text{und damit in Gl. 3-3} \quad \text{Gl. 3-4}$$

$$p \cdot A - \rho \cdot g \cdot h \cdot A - p_0 \cdot A = 0 \quad | \div A \quad \text{Gl. 3-5}$$

Das Ergebnis ist die Grundgleichung der Hydrostatik:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad \text{Gl. 3-6}$$

Der Druck ist an jedem Punkt im Fluid richtungsunabhängig, also ein Skalar und resultiert, unabhängig von Verdeckungen oder Ausdehnung des Fluids, aus der lotrechten Strecke zwischen Beobachtungspunkt und der Lage der Wasseroberfläche.

Aus dieser Gleichung leitet man zwei Sätze ab:

Satz 1: In einer Flüssigkeit herrscht in Punkten gleicher Höhe/Tiefe der gleiche Druck.

Satz 2: Der Druck wächst proportional zur Tiefe und nimmt proportional zur Höhe ab.

3.2 Anwendung der hydrostatischen Grundgleichung

3.2.1 Pascalsches Paradoxon

- Gleiche Flüssigkeit
- Gleiche Höhe
- Gleiche Fläche
- Verschiedenes Gewicht

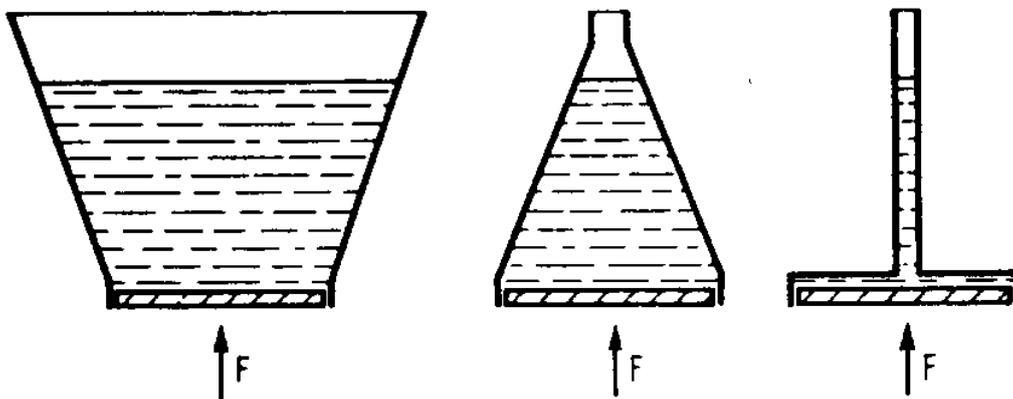


Abb. 3-2: Pascalsches Paradoxon (Becker: Technische Strömungslehre)

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad p_2 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad p_3 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad \text{Gl. 3-7}$$

$$p_1 = F_1 \cdot A \quad p_2 = F_2 \cdot A \quad p_3 = F_3 \cdot A \quad \text{Gl. 3-8}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad \text{Gl. 3-9}$$

Der Bodendruck ist in allen skizzierten Gefäßen gleich. Es wirkt die gleiche Kraft F , unabhängig vom Gewicht der Flüssigkeit. Die Druckkraft ist unabhängig von der Gefäßform, wenn die Grundflächen gleich groß sind.

$$p = \frac{F}{A} \quad (\text{siehe Gl. 2-1})$$

3.2.2 Druckverlauf in kommunizierenden Röhren

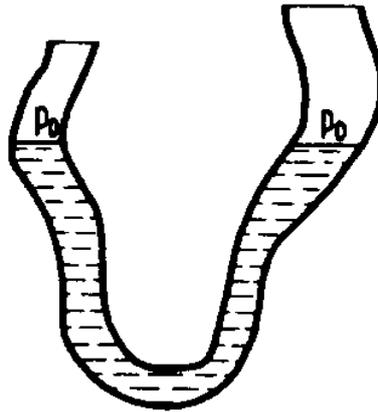


Abb. 3-3: Kommunizierende Röhren

Beispiel: U-Rohr mit zwei nichtmischbaren Flüssigkeiten

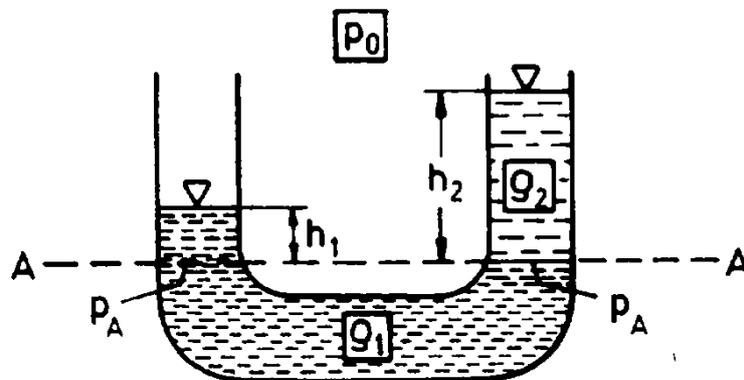


Abb. 3-4: U-Rohr (Gersten: Einführung in die STM)

Die Linie $A-A$ wird als Bezugslinie (BZL) bezeichnet \rightarrow Der hydrostatische Druck im linken Schenkel ist gleich dem hydrostatischen Druck im rechten Schenkel des U-Rohrs (des U-Rohr-Manometers). Würden wir den oberen Teil über der Bezugslinie BZL wegnehmen, würde ein System aus kommunizierenden Röhren entstehen, wie in Abb. 3-3.

$$p_L = p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \quad \text{Grundgleichung der Hydrostatik im linken Schenkel} \quad \text{Gl. 3-10}$$

$$p_R = p_0 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \quad \text{Grundgleichung der Hydrostatik im rechten Schenkel} \quad \text{Gl. 3-11}$$

$$p_L = p_R \quad \text{Drücke sind gleich an der Bezugslinie } BLZ \quad \text{Gl. 3-12}$$

$$p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_0 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \quad \text{Gl. 3-13}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} \quad \text{Gl. 3-14}$$

(It. Abb. 3-4 gilt: $h_2/h_1 > 1$ und $\rho_1 > \rho_2$)

3.2.3 Hydraulische Presse

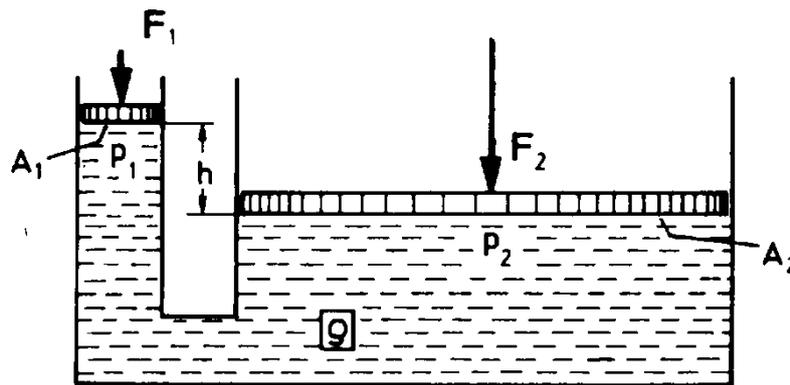


Abb. 3-5: Hydraulische Presse (Gersten: Einführung in die STM)

$$p_L = p_u + \frac{F_1}{A_1} + \rho \cdot g \cdot h \quad \text{Gl. 3-15}$$

$$p_R = p_u + \frac{F_2}{A_2} \quad \text{Gl. 3-16}$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} - \rho \cdot g \cdot h_1 \quad \text{Gl. 3-17}$$

$$\rho \cdot g \cdot h_1 \rightarrow 0, \text{ da } \rho \cdot g \cdot h_1 \ll \frac{F_2}{A_2} \quad \text{Gl. 3-18}$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{Gl. 3-19}$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}, \text{ da } A_2 \gg A_1 \rightarrow F_2 \gg F_1 \quad \text{Gl. 3-20}$$

Schlussfolgerung: Mit einer kleinen Kraft F_1 kann man eine große Kraft F_2 erzeugen.

3.2.4 U-Rohr-Manometer zur Messung des Gasdruckes

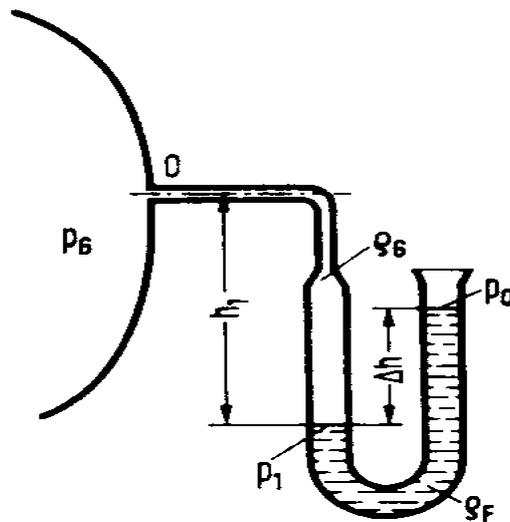


Abb. 3-6: U-Rohr-Manometer (Becker: Technische Strömungslehre)

BZL: „links“ = „rechts“

$$p_G + \rho_G \cdot g \cdot h_1 = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h \quad (\text{Druck der Gassäule wird vernachlässigt}) \quad \text{Gl. 3-21}$$

$$\rho_G \cdot g \cdot h_1 = 0 \rightarrow \rho_G \ll \rho_{Fl} \quad \text{Gl. 3-22}$$

$$p_G = p_1 = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h \quad \text{Gl. 3-23}$$

Dabei bezeichnen wir $\rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h = \Delta p_G$ auch als Überdruck $p_{\ddot{U}}$. Dieser ist positiv, wenn $p_G > p_0$ ist. Wenn $p_G < p_0$, dann ist Δp_G negativ und wird auch als Unterdruck p_U bezeichnet.

Vor jeder Berechnung ist zu prüfen, ob nach dem **Überdruck oder dem Unterdruck Δp gegenüber einer Umgebung** oder dem Absolutdruck p_{abs} gefragt ist! Der Überdruck resultiert nur aus dem betrachteten Fluid, der Absolutdruck zuzüglich dem atmosphärischen Druck (= Umgebungsdruck = Luftdruck) der Umgebung.

3.2.5 Flüssigkeitsschichten

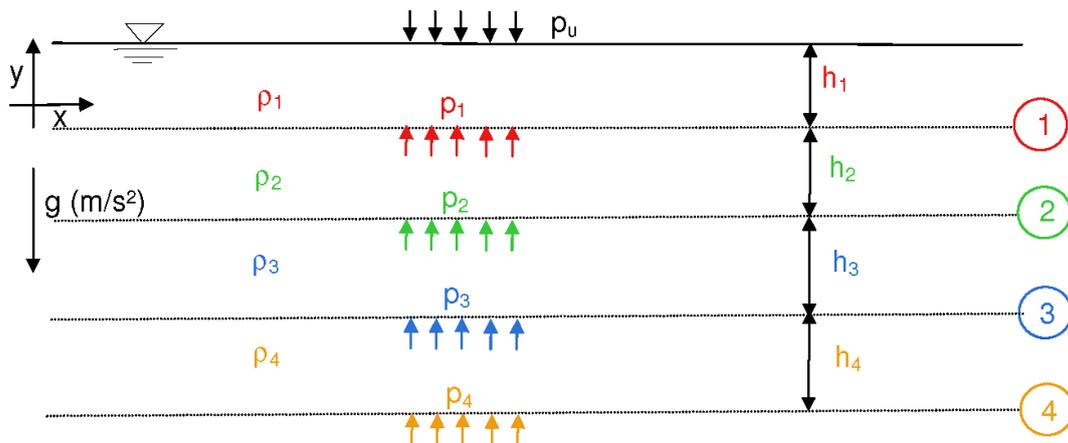


Abb. 3-7: Geschichtete Fluide

$$p_i = p_u + \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot g \cdot h_i \quad \text{Gl. 3-24}$$

$$p_4 = p_u + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + \rho_4 \cdot g \cdot h_4 \quad \text{Gl. 3-25}$$

Bei gleichen Dichten $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ vereinfacht sich Gl. 3-25 zu:

$$p_4 = p_u + \rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \quad \text{Gl. 3-26}$$

3.3 Statischer Auftrieb

3.3.1 Archimedisches Prinzip

Beim Eintauchen eines beliebig geformten Körpers in eine Flüssigkeit stellt man eine scheinbare Gewichtsminderung fest.

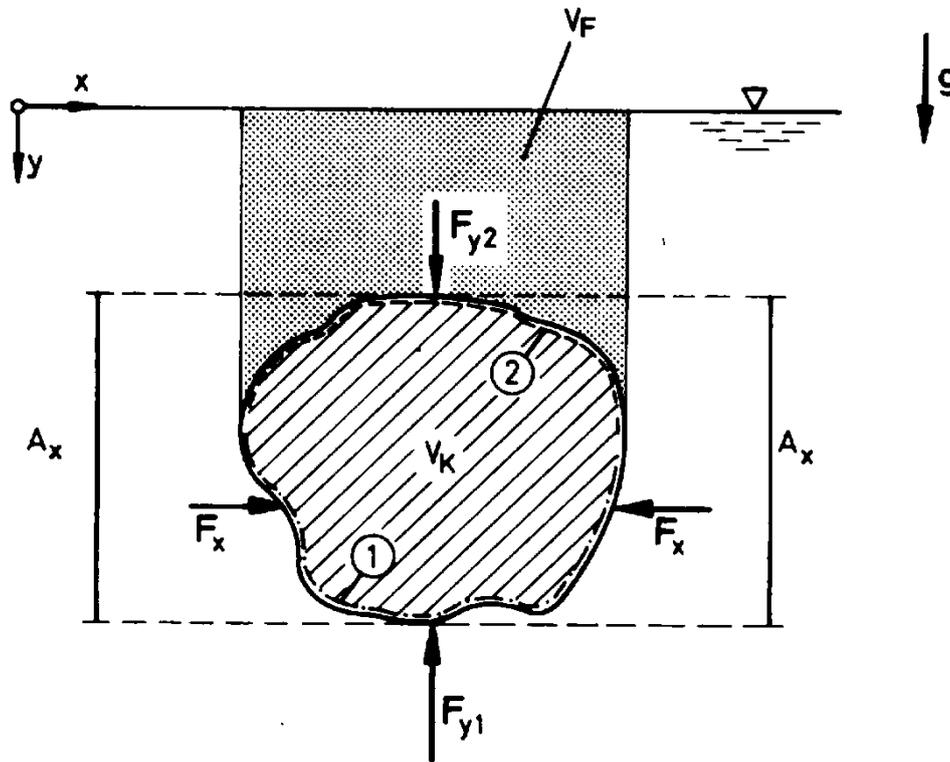


Abb. 3-8: Druckkräfte am eingetauchten Körper

Archimedes entdeckte, dass der Betrag, um den sich das Gewicht scheinbar vermindert, gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist.

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g \quad \text{Gl. 3-27}$$

V_K – Volumen des eingetauchten Körpers

Der statische Auftrieb eines vollständig in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit $\rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$.

Der Angriffspunkt ist der Volumenschwerpunkt des verdrängten Volumens. Durch den statischen Auftrieb F_A erfährt der Körper scheinbar einen Gewichtsverlust ΔG (Prinzip von Archimedes)

$$\Delta G \cong F_A \quad \text{Gl. 3-28}$$

Das scheinbare Gewicht (in der Flüssigkeit) entspricht der Differenz zwischen dem Gewicht des Körpers in Luft und dem Auftrieb.

$$G_{sch} = G - F_A = G - \Delta G \quad \text{Gl. 3-29}$$

$$F_A = G - G_{sch} = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g \quad \text{Gl. 3-30}$$

$$V_K = \frac{G - G_{sch}}{\rho_{Fl} \cdot g} \quad \text{Gl. 3-31}$$

G – Gewicht des Körpers in Luft

G_{sch} – Gewicht des Körpers im vollständig eingetauchten Zustand

Bei bekannter Dichte ρ_{Fl} der Flüssigkeit lässt sich das Volumen des Körpers bestimmen, wenn man den Körper in Luft und in der Flüssigkeit ausgewogen hat. Das Gewicht des Körpers lässt sich durch die Dichte ρ_K ausdrücken.

$$G = \rho_K \cdot V \cdot g \rightarrow V = \frac{G}{\rho_K \cdot g} \quad \text{Gl. 3-32}$$

Eingesetzt in V (Gl. 3-32) ergibt:

$$\frac{G}{\rho_K \cdot g} = \frac{G - G_{sch}}{\rho_{Fl} \cdot g} \quad \text{Gl. 3-33}$$

$$\rho_K = \frac{G}{G - G_{sch}} \cdot \rho_{Fl} \quad \text{Gl. 3-34}$$

Abgewandelt lässt sich damit das Archimedes-Problem lösen:

Zuerst Waage in Luft mit Krone auf der einen Seite, Goldklumpen auf der anderen Seite ausgeglichen $\rightarrow G_{Krone} = G_{Gold}$ (Goldklumpen, genauso schwer wie der den der König dem Goldschmied gab). Schmied behauptet, er habe alles Gold in der Krone verarbeitet.

Dann Waage in Wasser abgesenkt, Waage schlägt aus. Das Scheingewicht der echten Goldklumpen ist größer als das der Krone. Der Goldschmied wurde überführt.

Schwimmen:

Der Körper schwimmt, wenn ein Teil seines Volumens aus der Flüssigkeit herausragt.

Der Körper schwimmt, wenn ein Teil seines Volumens aus der Flüssigkeit herausragt

$$F_A = G \quad \text{Zustand Schwimmen} \quad \text{Gl. 3-35}$$

Schweben:

Der Körper ist völlig eingetaucht, weder sinkt noch steigt er

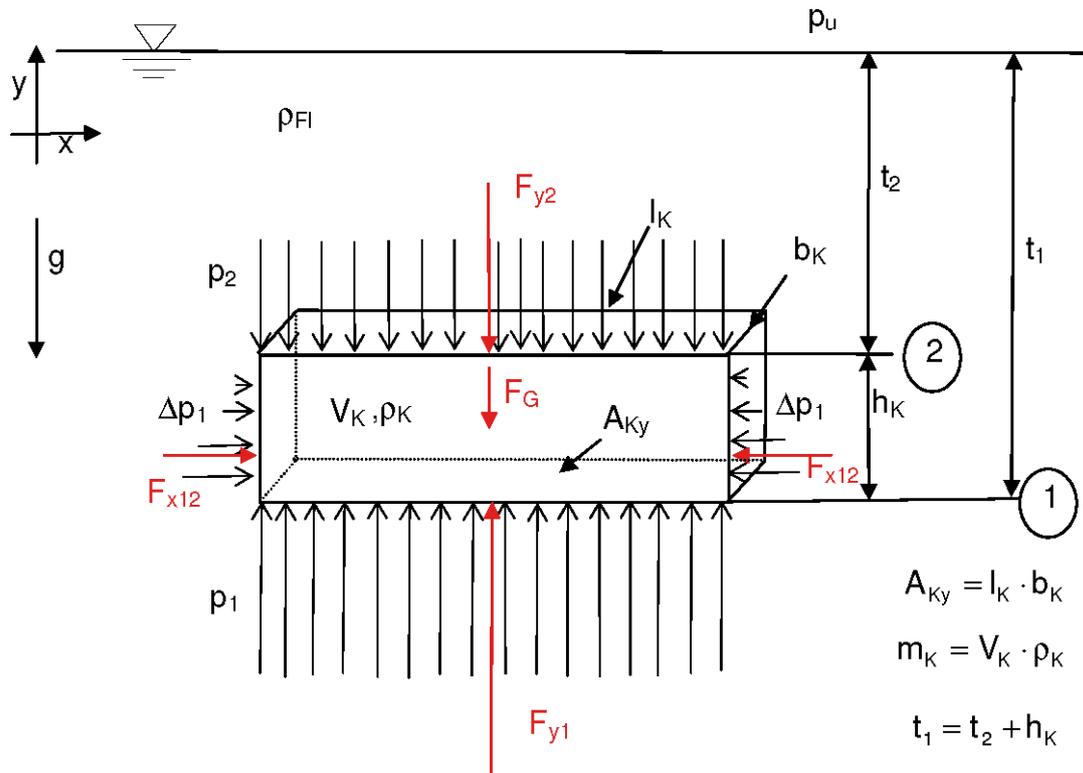


Abb. 3-9: Kraftverteilung am eingetauchten Körper beim Schweben

Newton'sches Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad \text{Gl. 3-36}$$

$$0 = -F_{x,12} + F_{x,12} \quad \text{Gl. 3-37}$$

$$F_{x,12} = F_{x,12} \quad \text{Gl. 3-38}$$

Newton'sches Kräftegleichgewicht in y-Richtung:

$$\sum F_{y,i} = 0 \quad \text{Gl. 3-39}$$

$$0 = F_{y,1} - G - F_{y,2} \quad \text{Gl. 3-40}$$

$F_{y,1}$ – Druckkraft, die in der Tiefe t_1 , **von unten** normal auf den Körper wirkt

$$F_{y,1} = p_1 \cdot A_{K,y} = [p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot (t_2 + h_K)] \cdot A_{K,y} \quad \text{Gl. 3-41}$$

$F_{y,2}$ – Druckkraft, die in der Tiefe t_2 , **von oben** normal auf den Körper wirkt

$$F_{y,2} = p_2 \cdot A_{K,y} = (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_2) \cdot A_{K,y} \quad \text{Gl. 3-42}$$

F_G – Gewichtskraft des Körpers

$$F_G = m_K \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g \quad \text{Gl. 3-43}$$

F_G – Gewichtskraft des Körpers

Durch Einsetzen in Gl. 3-40 ergibt sich:

$$0 = (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_1) \cdot A_{K,y} - \rho_K \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} - (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_2) \cdot A_{K,y} \quad \text{Gl. 3-44}$$

$$\rho_K \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} = (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_1) \cdot A_{K,y} - (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_2) \cdot A_{K,y}$$

$$\rho_K \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} = (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_1 - p_u - \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_2) \cdot A_{K,y}$$

$$\rho_K \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} = \rho_{Fl} \cdot g \cdot (t_1 - t_2) \cdot A_{K,y}$$

Mit $h_k = t_1 - t_2$ folgt daraus:

$$\rho_K \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} \quad \text{Gl. 3-45}$$

Beide Seiten der Gleichung entsprechen F_G und damit F_A :

$$F_G = \rho_K \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} \quad \text{Gl. 3-46}$$

Die rechte Seite der Gleichung entspricht F_A .

$$F_A = m_{Fl} \cdot g = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_k \cdot A_{K,y} \quad \text{Gl. 3-47}$$

Durch das Gleichgewicht dieser beiden Kräfte entspricht die Auftriebskraft F_A ebenfalls der Differenz der beiden Druckkräfte in der Flüssigkeit, sogar in verschiedenen Tiefen.

Der Körper schwebt, wenn sein gesamtes Volumen in der Flüssigkeit eingetaucht in der gleichen Tiefe verharrt.

$$F_A = F_G = F_{y,2} - F_{y,1} \quad \text{Zustand Schweben} \quad \text{Gl. 3-48}$$

3.3.2 Stabilität schwimmender Körper

Der Abschnitt wird noch überarbeitet...

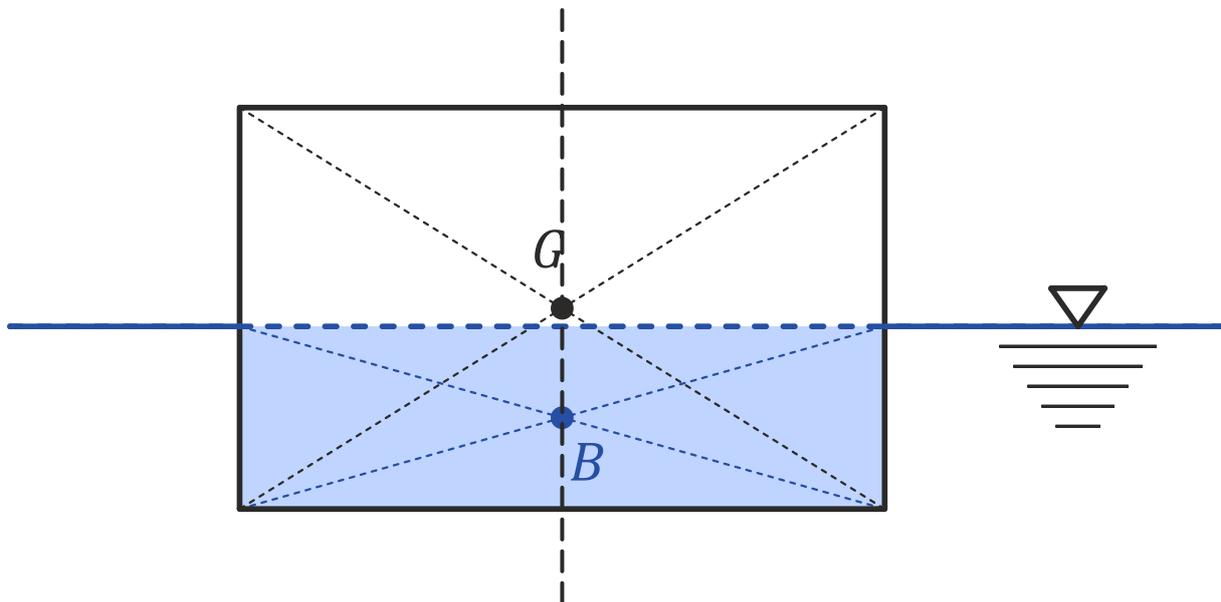


Abb. 3-10: Schwimmender Körper – stabil ruhend – Schwerpunkt der Gewichtskraft genau über dem Schwerpunkt des verdrängten Fluidvolumens (hier der Flächenschwerpunkt)

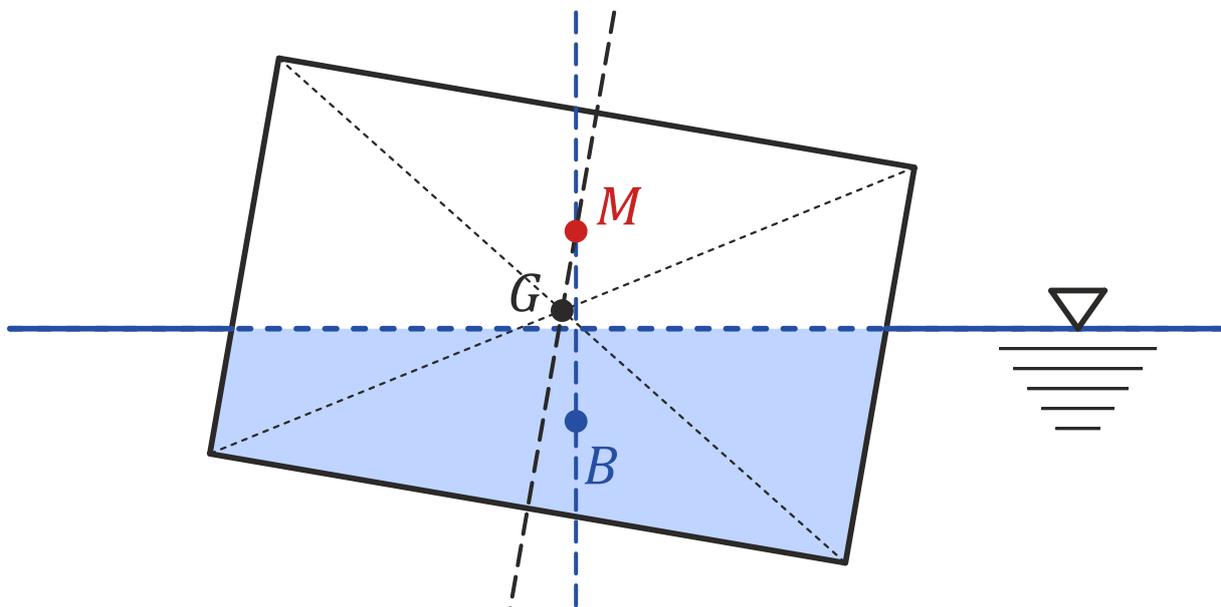


Abb. 3-11: Stabile Schwimmlage mit Kränkung

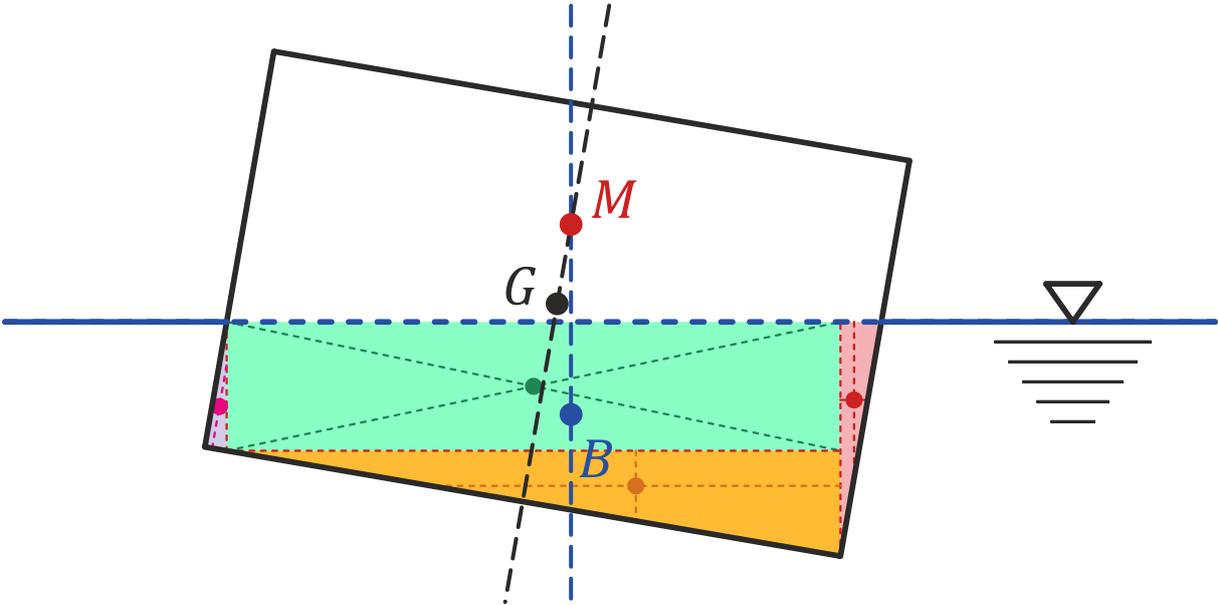


Abb. 3-12: Bestimmung des Flächenschwerpunktes

3.4 Kräfte auf Behälterwände

Beispiel: Druckkraft auf eine ebene Wand

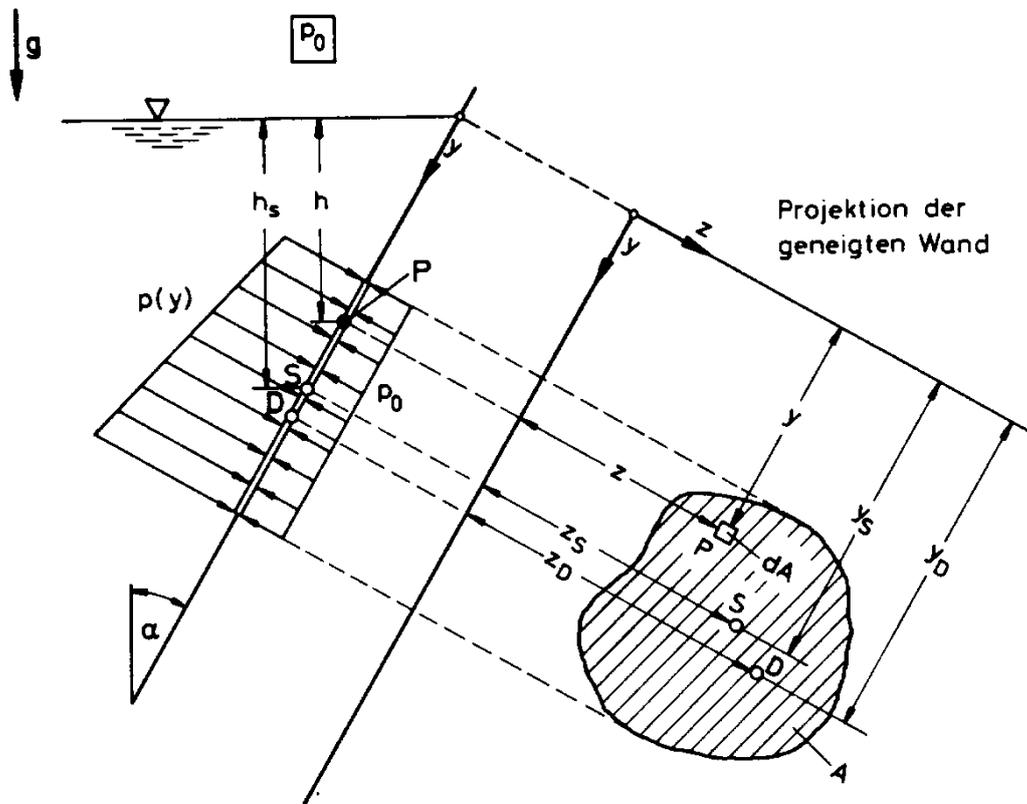


Abb. 3-13: Druckkraft auf eine geneigte ebene Wand (Tiefe b gemessen senkrecht zur Tafel)

Ein Behälter, in dem sich ein Fluid der Dichte ρ befindet, sei durch eine geneigte ebene Wand begrenzt. Auf eine vorgegebene Fläche A übt dann die Flüssigkeit die Druckkraft F aus, deren Betrag und Angriffspunkt gesucht werden.

Im Punkt P befindet sich ein Flächenelement dA in der Tiefe $h(y)$:

$$\frac{h(y)}{y} = \cos \alpha \quad h(y) = y \cdot \cos \alpha \quad dA = b \cdot dy \quad \text{Gl. 3-49}$$

Die Kraft die auf die Innenseite des Behälters wirkt ergibt sich aus:

$$dF = p(y) \cdot dA \quad \text{Gl. 3-50}$$

$$dF = dF_{Fl} + p_0 \cdot dA \quad \text{Gl. 3-51}$$

Der Druck folgt aus

$$p(y) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad \text{Gl. 3-52}$$

$$p(y) = p_0 + \rho \cdot g \cdot y \cdot \cos \alpha \quad \text{Gl. 3-53}$$

Der Kraftanteil dF_{Fl} , der von der Flüssigkeit allein erzeugt wird, berechnet sich zu:

$$dF_{Fl} = dF - p_0 \cdot dA \quad \text{Gl. 3-54}$$

$$dF_{Fl} = p_0 \cdot dA + \varrho \cdot g \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot dA - p_0 \cdot dA \quad \text{Gl. 3-55}$$

$$dF_{Fl} = \varrho \cdot g \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

$$F_{Fl} = b \cdot \varrho \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \int_0^L y \cdot dy \quad \text{Gl. 3-56}$$

$$dA = b \cdot dy \quad \text{Gl. 3-57}$$

$$F_{Fl} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \varrho \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot [y^2]_0^L \quad A = b \cdot L \quad \text{Gl. 3-58}$$

4 Dynamik der Fluide – Beschreibung von Strömungen

Um die Bewegung des Fluids in einer Strömung zu beschreiben, gibt es zwei verschiedene Darstellungsmethoden. Die Strömung in einem vorgegebenen Koordinatensystem, z. B. kartesisch mit der Zeit, ist charakterisiert durch:

$$\text{Temperatur: } T = T(x, y, z, t) \quad \text{Gl. 4-1}$$

$$\text{Druck: } p = p(x, y, z, t) \quad \text{Gl. 4-2}$$

$$\text{Dichte: } \rho = \rho(x, y, z, t) \quad \text{Gl. 4-3}$$

$$\text{Geschwindigkeit: } w = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\} \quad \text{Gl. 4-4}$$

Es interessiert in diesem Fall nicht das Einzelschicksal einzelner, sondern das Verhalten ständig wechselnder Fluidteilchen, die einen vorgegebenen Punkt passieren.

Für **dreidimensionale Strömungen** gilt:

$$u, v, w, p, \rho, T = f(x, y, z, t) \dots \text{räumlich}$$

Für **zweidimensionale Strömungen** gilt:

$$u, v, p, \rho, T = f(x, y, t) \dots \text{eben}$$

Für **eindimensionale Strömungen** gilt:

$$u, p, \rho, T = f(x, t) \dots \text{Stromfaden, wenn stationäre Strömung}$$

Zeitabhängigkeit

Liegt keine Zeitabhängigkeit vor, spricht man von einer *stationären Strömung*. Liegt Zeitabhängigkeit vor, spricht man von einer **instationären Strömung**.

Stoffeigenschaften

- Reibungsfreie/reibungsbehaftete Strömung
- Kompressible/inkompressible Strömung
- Ideales/nichtideales Gas

Inkompressibles Fluid ($\rho = \text{const.}$)

Ein Fluid dessen Dichte während der Strömung konstant bleibt, heißt **inkompressibles Fluid**. In der Literatur verwendet man auch eine andere Formulierung: Eine Strömung, bei der die Dichte ρ des strömenden Fluids konstant bleibt, heißt inkompressible Strömung.

Vernachlässigung der Temperatur T

Wenn einfache (Modell-)Fluide betrachtet werden, kann die Temperatur vernachlässigt werden.

1. Inkompressibles Fluid ($\rho = \text{const.}$)

Das Temperaturfeld hat keinen Einfluss auf Druck- und Geschwindigkeitsverteilung (Geschwindigkeitsfeld), wenn Viskosität über der Temperatur konstant ist.

2. Ideales Gas ($p = \rho \cdot R_s \cdot T$)

Wenn Druck p und Dichte ρ bekannt sind, kann die Temperatur berechnet werden. R_s ist die spezifische Gaskonstante.

5 Viskosität und Oberflächenspannung

5.1 Viskosität

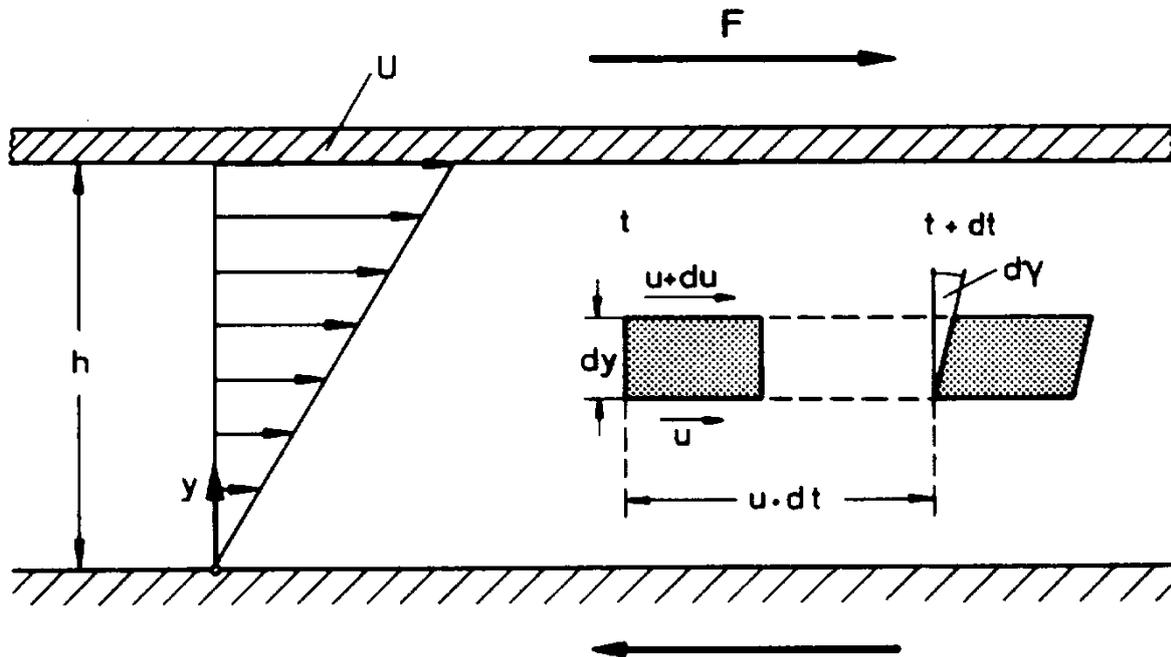


Abb. 5-1: Taylor-Couette-Strömung

Ein viskoses Fluid befindet sich zwischen einer festen Grundplatte und einer im Abstand h dazu parallelen Platte, die mit der Geschwindigkeit U bewegt wird (siehe Abb. 5-1). Bei diesem als Taylor-Couette-Strömung bekannten Vorgang bewegt sich das Fluid zwischen den Platten jeweils relativ zu dessen Oberflächen.

Es entsteht mit der Fläche A eine Tangentialkraft oder Schubspannungskraft F , die aufgewendet werden muss, um die Relativbewegung zu bewirken.

In einem Fluid ist die Schubspannung τ das Verhältnis der Schubkraft zur Fläche, an der die Schubkraft angreift. Mit der Plattenfläche A heißt das:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{Gl. 5-1}$$

Haftbedingung: Am Rande haben die Flüssigkeitsteilchen die gleiche Geschwindigkeit wie die Platte.

Der Zusammenhang zwischen der Schubspannung τ (Belastung) und dem Geschwindigkeitsgradienten wird **Reibungsgesetz** genannt.

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad \text{Gl. 5-2}$$

Ein Fluid mit linearem Reibungsgesetz heißt **Newtonsches Fluid**, anderenfalls Nicht-Newtonsches Fluid.

Newtonsches Reibungsgesetz:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (\text{siehe Gl. 5-2})$$

Wenn $u(y)$ linear ist, folgt:

$$\tau = \eta \cdot \frac{u}{h} \quad \text{Gl. 5-3}$$

Der Proportionalitätsfaktor η heißt **dynamische Viskosität** und hat die Einheit $[\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}]$.

Die Fähigkeit eines Fluids, Schubspannungen zwischen zwei Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeiten oder zwischen dem bewegten Fluid und einer festen Wand übertragen zu können, liegt in seiner **dynamischen Viskosität** η . Sie wird durch molekulare Kräfte hervorgerufen und ist eine Stoffeigenschaft. Sie hängt bei mäßigen Drücken nur von der Temperatur des Fluids ab.

Die **kinematische** (dichtebezogene) **Viskosität** ν ist

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{Gl. 5-4}$$

und hat die Einheit $[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$.

In dieser Abhandlung werden ausschließlich Newtonsche Fluide behandelt.

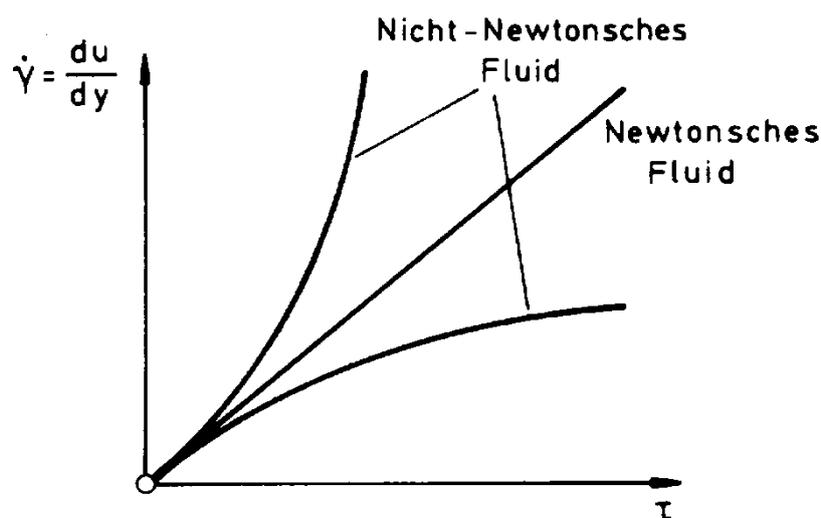


Abb. 5-2: Reibungsgesetze

6 Massenerhaltung

Schon in der Einführung wird darauf hingewiesen, dass sich die Fluidstatik als Spezialfall bewegter Fluide ansehen lässt, bei dem die kinematische Restriktion

$$w = w(x, y, z) = \{u, v, w\} = 0 \quad \text{Gl. 6-1}$$

gilt. Beim Studium des Bewegungsverhaltens homogener Fluide interessieren uns der Geschwindigkeitsvektor w (manchmal auch u , siehe Abb. 6-1), der Druck p und gegebenenfalls die Temperatur T . Hier wird in einer eindimensionalen Form die Kontinuitätsgleichung erklärt.

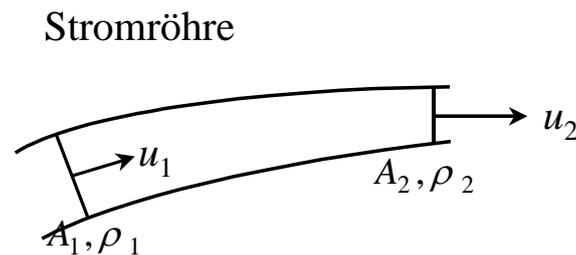


Abb. 6-1: Massenbilanz an einer Stromröhre

Die Größen u_1 , ρ_1 , u_2 und ρ_2 stellen geeignete Mittelwerte über die Querschnitte (1) und (2) dar. Über den Mantel der Stromröhre kann keine Masse fließen. Die Massenerhaltung fordert für den Massenstrom

$$\rho \cdot u \cdot A = \text{konst. bzw. } \dot{m} = \rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 6-2}$$

Bei dichtebeständigen, d. h. inkompressiblen, Medien ist $\rho = \text{konst.}$ In diesem Fall nimmt der Volumenstrom $\dot{V} = u \cdot A$ einen konstanten Wert an. Wie Tab. 6-1 zeigt, liegt bei konstanter Fläche A ein konstanter Volumenstrom bzw. eine konstante Massenstromdichte vor.

Aus didaktischen Erwägungen sei hier noch folgendes illustriert:

Volumenstrom $\dot{V} = dV/dt$ bzw. Massenstrom $\dot{M} = dM/dt$ wie Abb. 6-2 veranschaulicht, tritt in die Stromröhre im Zeitintervall dt das Volumen $dV_1 = A_1 \cdot u_1 \cdot dt$ ein. Bei der oben durchgeführten Herleitung der Kontinuitätsgleichung stellt der Volumenstrom (Massenstrom) $\dot{V}(\dot{M})$ demgemäß nichts anderes dar, als dasjenige Volumen, (diejenige Masse), das durch die Fläche A_1 pro Zeiteinheit dt hindurchgeht.

Kompression: Die Kompression eines Mediums führt zwar zu einer zeitlichen Änderung des eingeschlossenen Volumens V , es findet aber kein Massentransport statt.

Tab. 6-1: Formulierungen der Kontinuitätsgleichung (Geschwindigkeit w)

	kompressibel (Gase) $\rho \neq \text{konst.}$	inkompressibel $\rho = \text{konst.}$
$A \neq \text{konst.}$	$\rho \cdot w \cdot A = \text{konst.}$ $\rho \cdot \dot{V} = \dot{m} = \text{konst.}$ Massenstrom = konst.	$w \cdot A = \text{konst.}$ $\dot{V} = \text{konst.}$ Volumenstrom = konst. ↓ Massenstrom = konst.
$A = \text{konst.}$	$\rho \cdot w = \text{konst.}$ Massenstromdichte = konst.	$w = \text{konst.}$ Volumenstromdichte = konst.

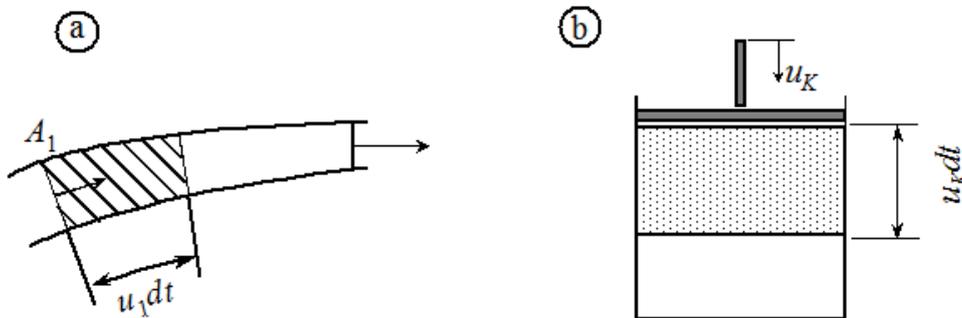


Abb. 6-2: Volumenstrom und zeitliche Volumenänderung

Für **kompressible** Fluide ($\rho \neq \text{konst.}$) bei **veränderlichem** Querschnitt gilt:

$$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot A = \text{konst.} \tag{Gl. 6-3}$$

Für **inkompressible** Fluide ($\rho = \text{konst.}$) gilt:

$$\dot{V} = w \cdot A = \text{konst.} \tag{Gl. 6-4}$$

Obige Gleichungen gelten für veränderlichen Querschnitt ($A \neq \text{konst.}$) der Stromröhre.

Bei **konstantem** Querschnitt ($A = \text{konst.}$) der Stromröhre gilt:

- Für ein **kompresibles** Fluid

$$\varrho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 = \varrho_2 \cdot w_2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 6-5}$$

$$\varrho \cdot w = \text{konst.} \quad \text{Gl. 6-6}$$

- Für ein **inkompresibles** Fluid

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 6-7}$$

$$w = \text{konst.} \quad \text{Gl. 6-8}$$

Die Geschwindigkeit w trifft senkrecht auf der Fläche A auf!

7 Energiesatz (1. HS)

7.1 Allgemeiner Energiesatz

Energiesatz bedeutet **Energiebilanz**. Energiebilanz bedeutet **Gleichgewicht**.

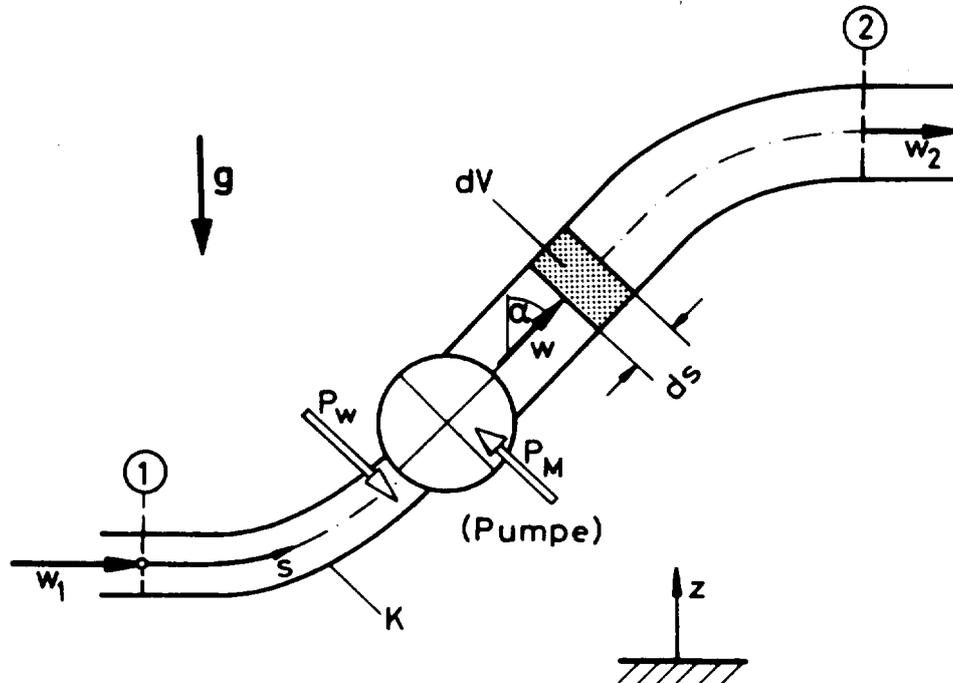


Abb. 7-1: Energiebilanz für eine Stromröhre

1, 2 – Querschnitte (Orte), für die eine Energiebilanz aufgestellt wird

P_M – Mechanische Leistung einer Pumpe oder Energie pro Zeit

Annahmen:

- Stationäre Strömung (zeitunabhängig)
- Inkompressible Strömung ($\rho = \text{konst.}$)
- Reibungsbehaftete Strömung ($\nu \neq 0$)

Die gesamte Energie besteht aus:

dem kinetischen Energiestrom (Bewegungsenergie)

$$\dot{E}_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} \cdot w^2 \quad \text{Gl. 7-1}$$

dem Druckenergiestrom (Druckenergie)

$$\dot{E}_{Druck} = \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p = \dot{V} \cdot p \quad \text{Gl. 7-2}$$

dem Höhenenergiestrom (Lageenergie) – zwischen den Zuständen 1 und 2 besteht ein Höhenunterschied (Leistung eines Kraftfeldes g)

$$\dot{E}_{H\ddot{o}he} = \dot{m} \cdot g \cdot z \quad \text{Gl. 7-3}$$

der Reibungsenergie (als aufgespeicherte Wärme)

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_v \cdot \Delta T \quad \text{Gl. 7-4}$$

$$c_v \cdot \Delta T = \varphi$$

φ [m^2/s^2] – spezifische technische Dissipation (Reibungsverluste)

c_v [J/(kg K)] – Wärmekapazität (die Wärme, die zur Erwärmung von 1 kg eines Stoffes um 1 K erforderlich ist)

dem zu- oder abgeführten Energiestrom (mechanische Leistung)

$$P_M = \dot{m} \cdot w_t \quad \text{Gl. 7-5}$$

w_t [m^2/s^2] – spezifische technische Arbeit. Über die Arbeitsmaschine (z. B. Pumpe) oder eine Kraftmaschine (z. B. Turbine) kann dem Volumen Arbeit zu- oder aus ihm abgeführt werden.

Vorzeichenregelung:

- Pumpe – plus (+), da dem Fluid (Volumen) Energie **zugeführt** wird
- Turbine – minus (–), da aus dem Fluid Energie **abgeführt** wird

Aus dem Energieerhaltungssatz

$$\dot{E}_{kin} + \dot{E}_{Druck} + \dot{E}_{H\ddot{o}he} + \dot{Q} + P_M = \text{konst.} \quad \text{Gl. 7-6}$$

Die Energiegleichung (Energiebilanz) von (1) nach (2) ($1 \rightarrow 2$ oder andere Indizes wie $i \rightarrow j$, jeder Index für einen beliebigen Ort in der Stromröhre) wird definiert zu:

$$\dot{E}_{kin,1} + \dot{E}_{Druck,1} + \dot{E}_{H\ddot{o}he,1} \pm P_M = \dot{E}_{kin,2} + \dot{E}_{Druck,2} + \dot{E}_{H\ddot{o}he,2} + \dot{Q} \quad \text{Gl. 7-7}$$

und somit mit konstantem Massenstrom zu:

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 \pm \dot{m} \cdot w_t = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 + \dot{m} \cdot \varphi \quad \text{Gl. 7-8}$$

7.2 Inkompressible reibungslose Strömung (Bernoulli-Gleichung)

7.2.1 Geschwindigkeits-, Druck-, Höhenform

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 \pm \dot{m} \cdot w_t = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 + \dot{m} \cdot \varphi \quad (\text{Gl. 7-8})$$

Mit den Annahmen:

$$w_{t,12} = 0 \quad \varphi = c_v \cdot \Delta T = 0 \quad \rho = \text{konst.} \quad T = \text{konst.}$$

ergibt sich die vereinfachte Form:

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 \quad \text{Gl. 7-9}$$

Daraus werden die verschiedenen Formen der [Bernoulli-Gleichung](#) hergeleitet.

a) [Geschwindigkeitsform](#) – Gl. 7-9, geteilt durch den Massenstrom \dot{m}

$$\underbrace{\frac{w_1^2}{2}}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{p_1}{\rho}}_{\text{Druckenergie}} + \underbrace{g \cdot z_1}_{\text{potentielle Energie}} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \quad \text{Gl. 7-10}$$

b) [Druckform](#) – Gl. 7-10, multipliziert mit der Dichte ρ

$$\underbrace{\rho \cdot \frac{w_1^2}{2}}_{\text{dynamischer Druck}} + \underbrace{p_1}_{\text{statischer Druck}} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z_1}_{\text{geodätischer Druck}} = \rho \cdot \frac{w_2^2}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \quad \text{Gl. 7-11}$$

c) [Höhenform](#) – Gl. 7-11, geteilt **durch** die Schwerebeschleunigung (Erdbeschleunigung) g **und durch** die Dichte ρ

$$\underbrace{\frac{w_1^2}{2 \cdot g}}_{\text{Geschwindigkeitshöhe}} + \underbrace{\frac{p_1}{\rho \cdot g}}_{\text{Druckhöhe}} + \underbrace{z_1}_{\text{geodätische Höhe}} = \frac{w_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 \quad \text{Gl. 7-12}$$

Entsprechend dem Energiesatz:

$$\frac{w^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z = \text{konst.} \quad \text{Gl. 7-13}$$

ist die Summe aus

- der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2 \cdot g}$,
- der Druckhöhe $\frac{p}{\rho \cdot g}$ und
- der geodätischen Höhe z

konstant.

In Manometerröhren (siehe Abb. 7-2) wird die Druckhöhe an der jeweiligen Anschlussstelle angezeigt. Die Differenz zwischen der Flüssigkeitshöhe in der Manometerröhre und der Flüssigkeitsoberfläche im Behälter ist gleich der Geschwindigkeitshöhe $w^2/(2g)$.

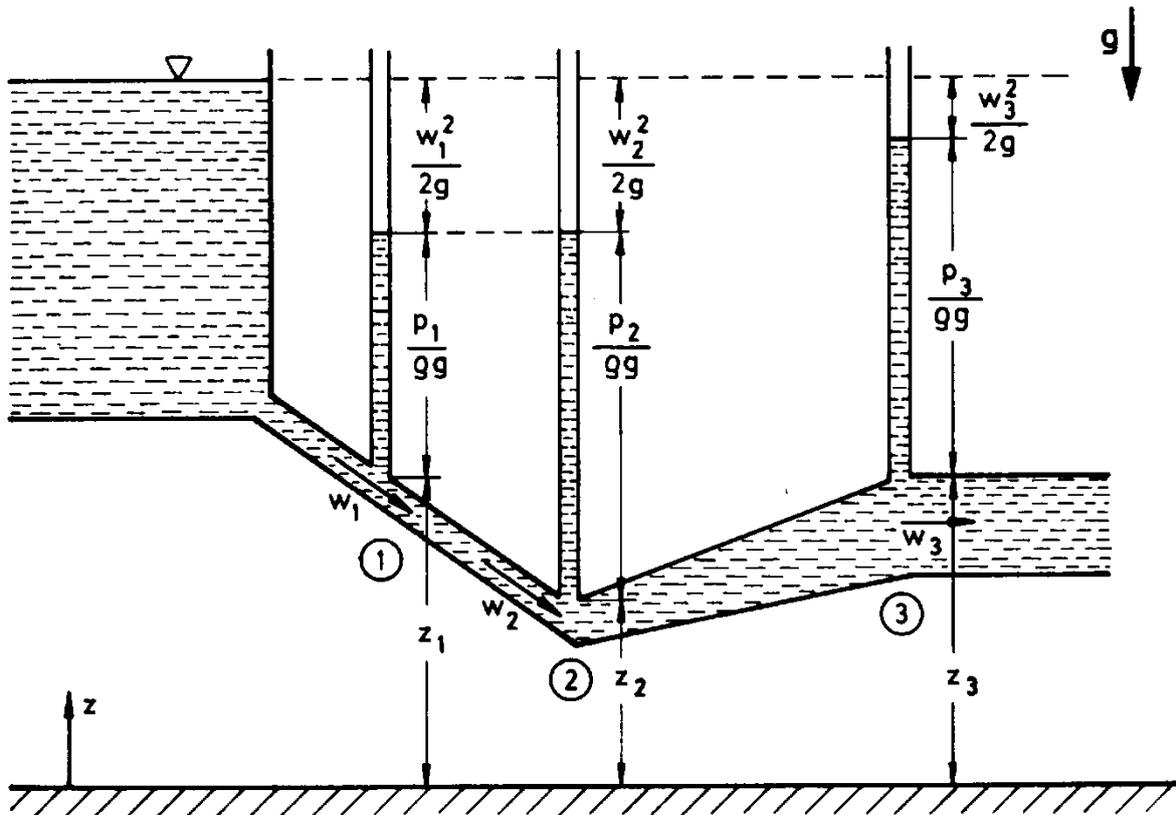


Abb. 7-2: Reibungslose Rohrströmung

Daraus kann die Geschwindigkeit an der Anschlussstelle berechnet werden. Aus dem Beispiel in Abb. 7-2 ist ersichtlich, dass $w_3 < w_2$ und $w_2 = w_1$ ist. Aus $w \cdot A = \text{konst.}$ ergibt sich

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \Rightarrow w_1 = w_2$$

$$w_2 \cdot A_2 = w_3 \cdot A_3 \Rightarrow w_3 = w_2 \cdot \frac{A_2}{A_3}, \text{ da } A_3 > A_2 \Rightarrow w_3 < w_2$$

7.2.2 Anwendung der Energie-Gleichung

7.2.2.1 Bernoulli-Gleichung ohne Höhenglied

Bei annähernd horizontalen Flüssigkeitsströmungen und bei Gasströmungen kann das Höhenglied fast immer vernachlässigt werden, d. h. $z = 0$.

Die Bernoulli-Gleichung ohne Höhenglied lautet:

$$\rho \frac{w_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{w_2^2}{2} + p_2 = \text{konst.}$$

Gl. 7-14

Der **dynamische Druck** q (Staudruck):

$$q = \rho \frac{w^2}{2} \text{ [Pa]} \quad \text{Gl. 7-15}$$

Der **Gesamtdruck** p_{ges}

$$p_{ges} = \rho \frac{w^2}{2} + p \text{ [Pa]} \quad \text{Gl. 7-16}$$

Damit lautet die Bernoulli-Gleichung ohne Höhenglied:

$$p_{ges} = q + p = \text{konst.} \quad \text{Gl. 7-17}$$

7.2.2.2 Ausflussformel nach Torricelli

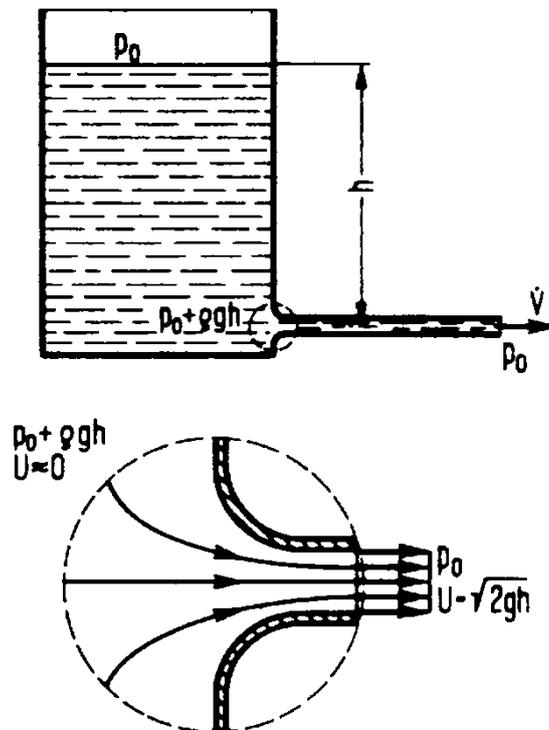


Abb. 7-3: Ausflussformel nach Torricelli

Gegeben sei ein oben offenes (**weites!**) Gefäß mit einer Öffnung am unteren Ende, aus dem reibungslos Flüssigkeit in die Umgebung ausströmt. Die Bernoulli-Gleichung in Energieform dazu lautet:

$$0 + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_2 \quad \text{Gl. 7-18}$$

$$A_1 \gg A_2 \text{ (weites Gefäß)} \Rightarrow w_1 = 0 \quad \text{Gl. 7-19}$$

$$\frac{w_2^2}{2} = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot h \quad \text{Gl. 7-20}$$

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad \text{Gl. 7-21}$$

Die Ausflussgeschwindigkeit hängt nur von der Höhendifferenz h und nicht von der Ausflussrichtung ab. In Abb. 7-4 ist die Geschwindigkeit w_2 in allen drei Fällen gleich. Die Dichte hat hier ebenfalls keinen Einfluss.

Die Ausflussformel von Torricelli gilt nur für $h = \text{konst.} \rightarrow (z_1 - z_2) = \text{konst.}$

Wenn $h \neq \text{konst.}$ ist, liegt ein instationärer Ausflussvorgang vor.

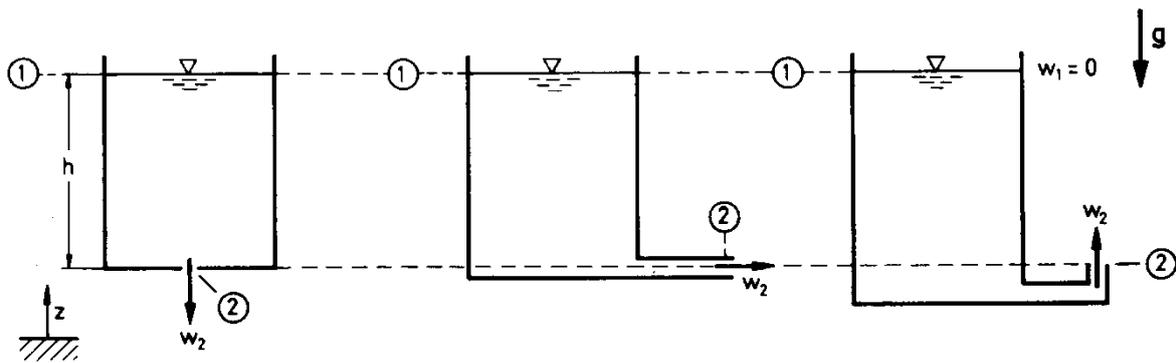


Abb. 7-4: Ausfluss von Flüssigkeiten aus verschiedenen Gefäßen

7.2.2.3 Druck im Staupunkt

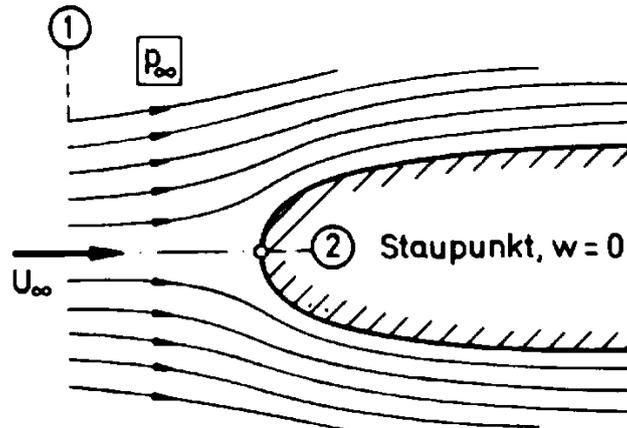


Abb. 7-5: Druck im Staupunkt

Beim Auftreffen einer Strömung auf ein freies Hindernis entsteht der Staupunkt. Gesucht ist der Druck im Staupunkt ($w_2 = 0$).

Da $z_1 = z_2$, ist hierfür die Bernoulli-Gleichung für horizontale Strömungen ohne Höhenglied geeignet.

$$\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 + p_\infty = 0 + p_S = p_{ges} \quad \text{Gl. 7-22}$$

Der dynamische Druck p_{dyn} ist nicht der Druck im Staupunkt.
Der Druck im Staupunkt S (in Abb. 7-5 (2)) ist gleich dem Gesamtdruck: $p_S = p_{ges}$.

Beispiel: Wind gegen eine Wand

Bei einer Windgeschwindigkeit von $v = 100 \text{ km/h}$ ergibt sich mit $\rho_L = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ein Staudruck von

$$q = p_{dyn} = \frac{\rho_L \cdot v^2}{2} = 464 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \text{Gl. 7-23}$$

Die daraus entstehende Kraft F

$$F = p_{dyn} \cdot A \quad \text{Gl. 7-24}$$

muss beim Entwurf von Häusern als Windlast berücksichtigt werden.

Man unterscheidet STAUDRUCK (dynamischer Druck) und DRUCK IM STAUPUNKT!

Für den Stromfaden im weit stromaufwärts gelegenen Punkt (1) (siehe Abb. 7-5) gilt:

$$\text{Umgebungsdruck} = p_\infty$$

$$\text{Geschwindigkeit} = w_\infty$$

w_∞ bedeutet nicht $w = \infty$, sondern w ist weit entfernt vom Objekt. Gleiches gilt für den Druck p_∞ .

Dieser Zusammenhang erlaubt es, die Messung der Anströmgeschwindigkeit eines Körpers auf eine Druckmessung zurückzuführen. Das geschieht mit zwei Sonden, dem Pitot-Rohr und dem Prandtl-Rohr.

7.2.2.4 Pitot-Rohr (Staudrucksonde) in einer Strömung

Die Messung des Gesamtdruckes (Druck im Staupunkt) erfolgt mit einer Sonde, die sich im strömenden Fluid befindet und deren Öffnung entgegen der Strömungsrichtung gewandt ist (siehe Abb. 7-6). Die Öffnung ist über eine Messleitung (Röhrchen, Schlauch) mit einem Messgerät verbunden. In der Messleitung selbst strömt kein Fluid. Ausschließlich der Druck wird, sofern stationär, verlustfrei bis zum Messgerät übertragen.

Obleich der deutsche Fachausdruck *Staudrucksonde* für das Pitot-Rohr ist, wird damit der Druck im Staupunkt und nicht der Staudruck (dynamischer Druck) gemessen.

Das Messgerät ist entweder ein Barometer, womit der Staudruck als Absolutdruck p_{ges} gemessen wird, oder es handelt sich um ein Manometer, mit dem die Druckdifferenz zu dessen Umgebung Δp_{ges} , $p_{\ddot{u},ges}$, $p_{U,ges}$ gemessen wird.

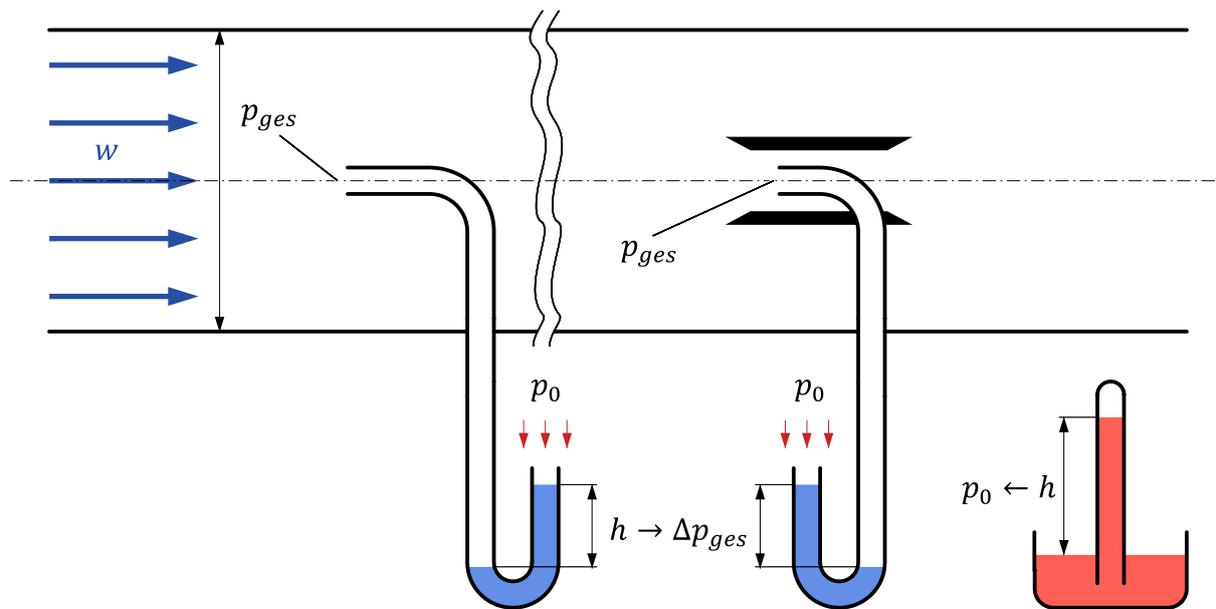


Abb. 7-6: Pitot-Rohr zur Messung des Gesamtdrucks einer Strömung, links als einfaches Pitot-Rohr, rechts ummantelt, um Schräganströmung zu verhindern, die das Messergebnis stören könnte

Eine nach **Henri Pitot** benannte Sonde, die nach dem beschriebenen Prinzip funktioniert ist das Pitot-Rohr. Durch einen Außenmantel um das eigentliche Pitot-Rohr herum entsteht ein ummanteltes Pitot-Rohr, das eine geringe Empfindlichkeit gegenüber Schräganströmung aufweist. Die ummantelte Variante wird häufig in der Luftfahrt zur indirekten Bestimmung der Fluggeschwindigkeit (Fahrt durch die Luft, Airspeed) aus dem Druck im Staupunkt verwendet.

7.2.2.5 Statische Druckmessung in einer Strömung

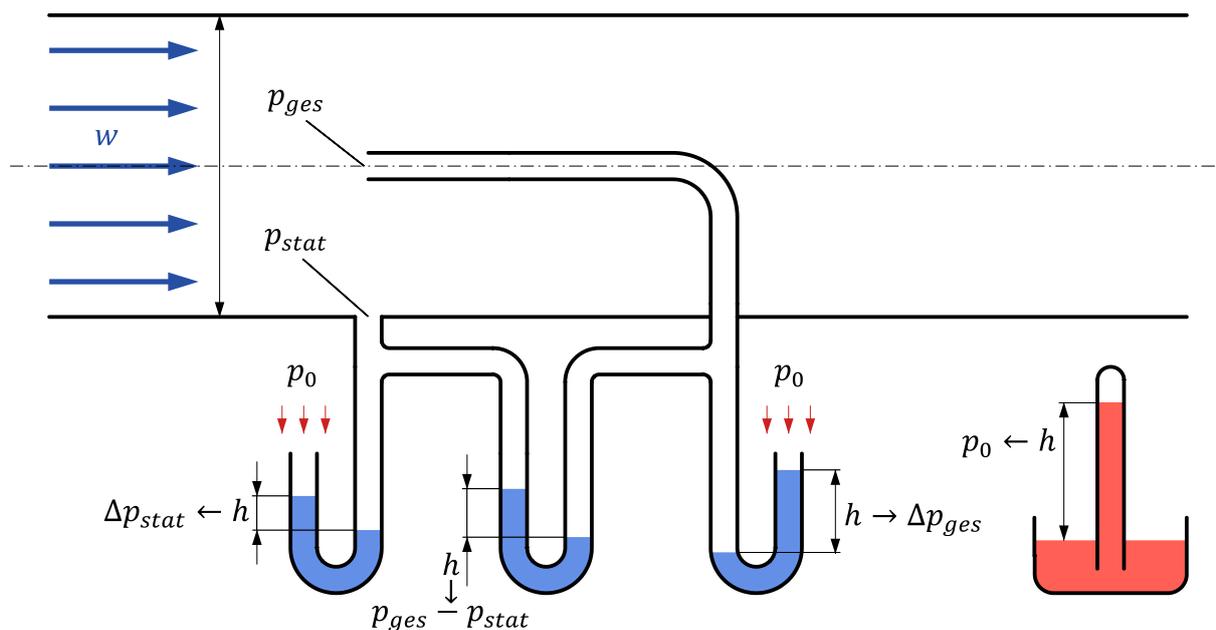


Abb. 7-7: Wandbohrung zur Messung des statischen Drucks, hier in Kombination mit einem Pitot-Rohr

Eine echte statische Druckmessung kann nur durch eine mit dem Fluid mitbewegte Sonde erfolgen, was in der Praxis jedoch schwierig bis unmöglich ist.

Eine ausreichend genaue Messung erfolgt daher mit einer senkrecht zur Strömungsrichtung angebrachten Wandbohrung (siehe Abb. 7-7) in einer Rohrströmung oder mittels einer statischen Sonde, die eine oder mehrere Bohrungen, ebenfalls senkrecht zur Strömungsrichtung an ihrem Mantel aufweist (siehe Abb. 7-8).

In Kombination mit einem Pitot-Rohr können der statische Druck und der Gesamtdruck gleichzeitig an der gleichen Stelle gemessen werden (Abb. 7-7).

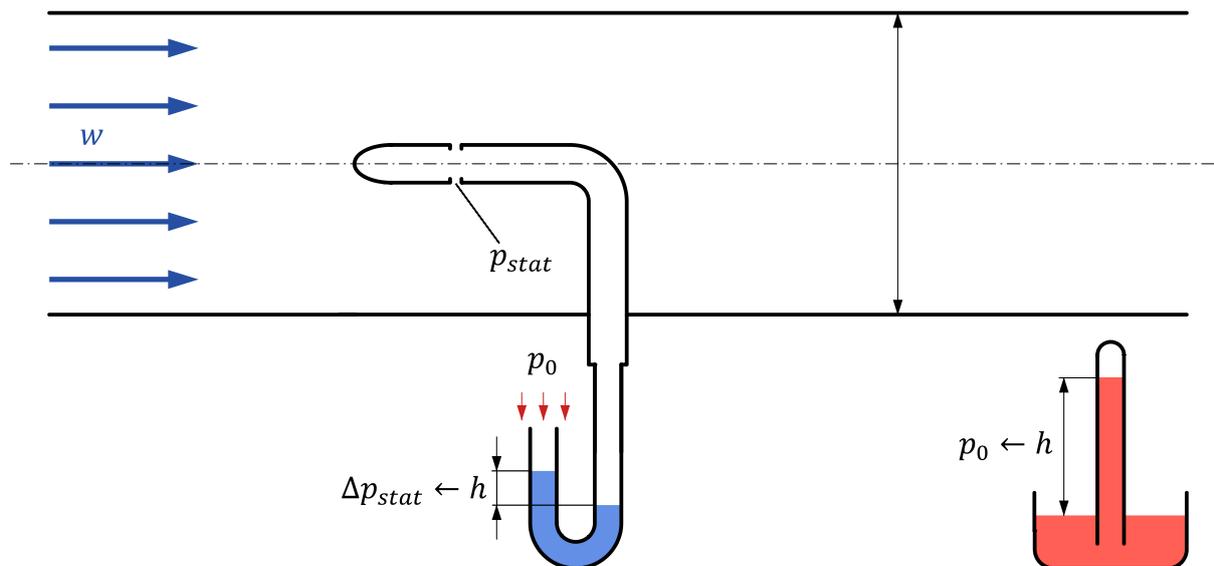


Abb. 7-8: Statische Sonde in einer Rohrströmung

7.2.2.6 Prandtl-Rohr (Prandtl-Sonde) in einer Strömung

Während mit dem Pitot-Rohr der Gesamtdruck p_{ges} und mit der Wandbohrung bzw. der statischen Sonde der statische Druck p_{stat} gemessen wird, ermöglicht eine Kombination beider Messergebnisse die Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit w , wenn die Dichte ρ des Fluids bekannt ist.

Aus der Bernoulli-Gleichung in der Druckform

$$p_{ges} = p_{dyn} + p_{stat} = \rho \frac{w^2}{2} + p_{stat} \quad (\text{Gl. 7-16})$$

geht hervor, dass die Strömungsgeschwindigkeit w aus der Differenz von Gesamtdruck und dynamischem Druck berechnet werden kann:

$$p_{dyn} = \rho \frac{w^2}{2} = p_{ges} - p_{stat} \quad \text{Gl. 7-25}$$

Die Geschwindigkeit w ergibt sich somit unter Kenntnis über die Fluidichte ρ aus:

$$w = \sqrt{2 \frac{p_{ges} - p_{stat}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{dyn}} \quad \text{Gl. 7-26}$$

Abb. 7-9 zeigt eine Messanordnung für die Bestimmung der einzelnen Drücke. Mithilfe einer nach **Ludwig Prandtl** benannten kombinierten Sonde, dem Prandtl-Rohr bzw. der Prandtl-Sonde können sowohl beide Messungen (statisch und gesamt) einzeln als auch direkt als Differenz durchgeführt werden.

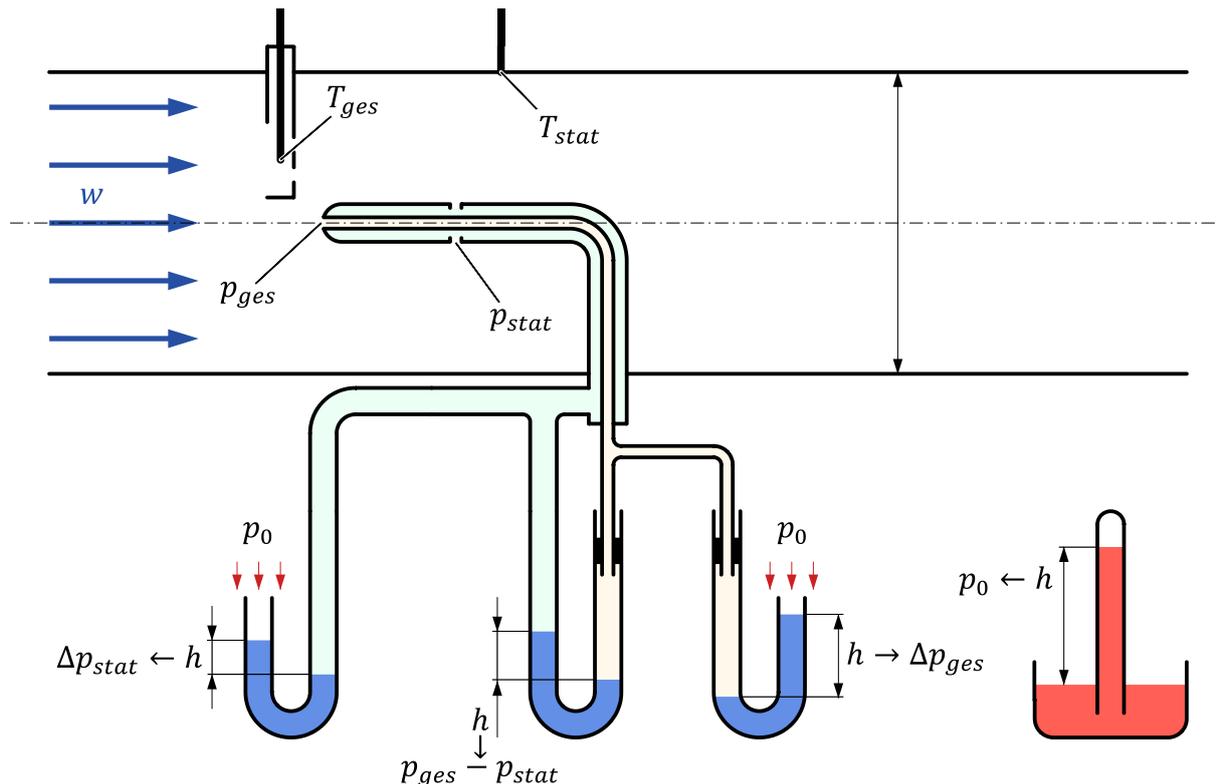


Abb. 7-9: Prandtl-Rohr zur Messung von Gesamtdruck und statischem Druck sowie Temperaturfühler für Gesamttemperatur und statische Temperatur in einer Rohrströmung

Die Prandtl-Sonde besteht aus zwei konzentrisch angeordneten Röhren die wie das Pitot-Rohr in das strömende Fluid hineinragen und entgegen der Strömung ausgerichtet sind. Das innen liegende Röhren leitet den Druck im Staupunkt, also den Gesamtdruck, ans Messgerät weiter. Das Innere Röhren ist von einem Mantel umgeben, der gegen das innere Röhren abgedichtet ist. Der Mantel enthält eine oder mehrere Bohrungen, die senkrecht zur Strömung ausgerichtet sind. Mit diesen Bohrungen wird somit der statische Druck gemessen.

Werden beide Messröhren über ein Manometer zusammengeschaltet, misst das Manometer die Differenz $p_{ges} - p_{stat}$ direkt (siehe Abb. 7-9), was genau den dynamischen Druck $p_{dyn} = \rho \frac{w^2}{2}$ darstellt.

Die Prandtl-Sonde wird häufig in der Luftfahrt zur Bestimmung der Fluggeschwindigkeit verwendet. Für die korrekte Geschwindigkeitsanzeige muss das Messergebnis noch entsprechend der herrschenden Temperatur korrigiert werden, dass die Luftdichte unter anderem von der Temperatur abhängt.

7.2.2.7 Venturi-Düse

Für die verlustfreie Bestimmung des Massenstroms \dot{m} , des Volumenstroms \dot{V} oder nur der Geschwindigkeit w in einer Rohrströmung eignet sich eine als Venturi-Düse bezeichnete Anordnung (benannt nach **Giovanni Battista Venturi**, siehe Abb. 7-10).

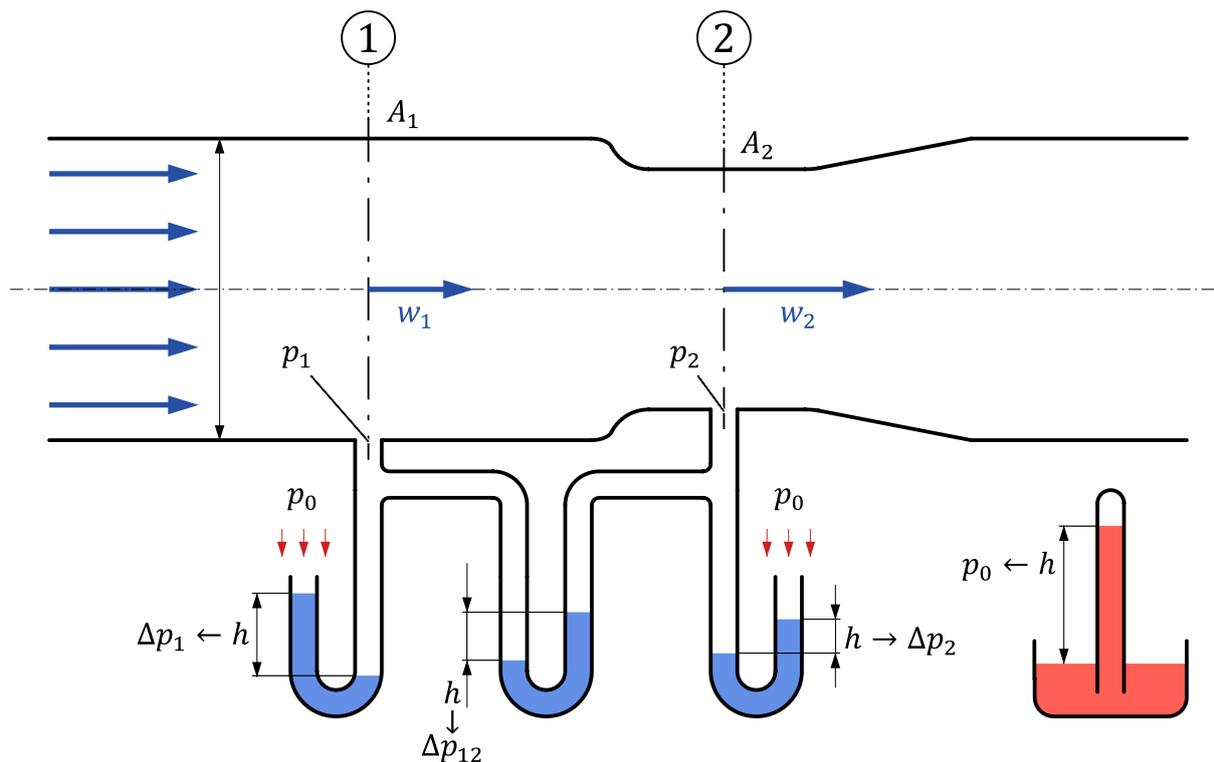


Abb. 7-10: Venturi-Düse zur Bestimmung des Volumenstroms, des Massenstroms oder der Strömungsgeschwindigkeit durch Messung von zwei statischen Drücken an verschiedenen Stellen mit verschiedenen Strömungsquerschnitten

Die Venturi-Düse besteht aus einem sich verjüngenden und stromabwärts wieder erweiternden Teil. Sie eignet sich aufgrund fehlender Einbauten wie bei Pitot- oder Prandtl-Sonden in der Praxis auch für verunreinigte Fluide.

Für inkompressible Fluide gilt nach der Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{V} = \text{konst.} = w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 7-27}$$

Die Bernoulli-Gleichung in der Druckform wird für die Venturi-Düse wie folgt aufgestellt:

$$\rho \frac{w_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{w_2^2}{2} + p_2 \quad \text{Gl. 7-28}$$

Die Messung mit der Venturi-Düse ergibt entweder die statischen Einzeldrücke p_1 und p_2 oder direkt über ein Manometer die Druckdifferenz Δp_{12}

$$\Delta p_{12} = p_2 - p_1 \quad \text{Gl. 7-29}$$

Aus der Kontinuitätsgleich nach Gl. 7-27 wird für die Geschwindigkeit w_2

$$w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad \text{Gl. 7-30}$$

in die Bernoulli-Gleichung (Gl. 7-28) eingesetzt und ergibt:

$$\rho \frac{w_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{w_1^2}{2} \cdot \frac{A_1^2}{A_2^2} + p_2 \quad \text{Gl. 7-31}$$

Aufgelöst nach der gemessenen Druckdifferenz, schreibt man

$$\Delta p_{12} = p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} \left(w_1^2 - w_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) = \rho \frac{w_1^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) \quad \text{Gl. 7-32}$$

Für die Strömungsgeschwindigkeit w_1 im nicht verengten Rohrabschnitten vor und hinter der Venturidüse ergibt sich damit

$$w_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{\Delta p_{12}}{1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_2 - p_1}{1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}} \quad \text{Gl. 7-33}$$

und damit der Volumenstrom

$$\dot{V} = w_1 \cdot A_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{\Delta p_{12}}{1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}} \cdot A_1 \quad \text{Gl. 7-34}$$

7.3 Inkompressible reibungslose Strömung mit Energiezufuhr

7.3.1 Spezifische Stutzenarbeit

Zwischen dem Eintritts- und Austrittsstutzen einer Strömungsmaschine kann dem Volumen (strömendes Fluid) spezifische technische Arbeit w_t zugeführt (Pumpe, Arbeitsmaschine) oder entzogen (Turbine, Hydromotor, Kraftmaschine) werden. Anstelle dieser spezifischen technischen Arbeit w_t wird bei den Strömungsmaschinen die spezifische Stutzenarbeit Y verwendet. Der Betrag der Stutzenarbeit ist immer positiv.

Energiezufuhr (dem strömenden Fluid zugeführt):

Die Energiezufuhr erfolgt von der Maschine zum Fluid. Dies geschieht mit einer Arbeitsmaschine, z. B. mit einer Pumpe oder einem Ventilator. Die Saugseite erhält den

Index (1), die Druckseite den Index (2). Die spezifische Stutzenarbeit Y ist gleich der spezifischen technischen Arbeit w_t :

$$Y = w_t \left[\frac{m^2}{s^2}; \frac{J}{kg} \right] \quad \text{Gl. 7-35}$$

Energieentnahme (dem strömenden Fluid entzogen):

Die Energieabfuhr bzw. die Entnahme von Energie erfolgt vom Fluid zur Kraftmaschine, z. B. Turbine oder Hydraulikmotor. Laut Vorzeichenregel ist der Betrag der spezifischen technischen Arbeit bei einer Kraftmaschine negativ (da dem Fluid Arbeit entnommen wird).

$$Y = -w_t \left[\frac{m^2}{s^2}; \frac{J}{kg} \right] \quad \text{Gl. 7-36}$$

7.3.2 Arbeitsmaschinen in der Rohrströmung (Pumpe)

In Abb. 7-11 ist ein Teil einer Rohrleitung konstanten Durchmessers d dargestellt. Eine Pumpe fördert Flüssigkeit über einen Höhenunterschied H . Es sollen keine Reibungsverluste auftreten. Durch die Arbeit der Pumpe entsteht die Druckdifferenz Δp_{12} von 1 \rightarrow 2:

$$\Delta p_{12} = p_2 - p_1 \quad \text{Gl. 7-37}$$

Spezifische Stutzenarbeit und Leistung der Pumpe

Die Energiegleichung lautet:

$$\text{Pumpeneintritt} + \text{Energiezufuhr} = \text{Pumpenausstritt} \quad \text{Gl. 7-38}$$

Die Bernoulli-Gleichung in der Geschwindigkeitsform für die Pumpe (Arbeitsmaschine) zwischen dem Eintrittsstutzen (1) und dem Austrittsstutzen (2) lautet somit:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + w_{t12} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \quad \text{Gl. 7-39}$$

Mit dem konstanten Strömungsquerschnitt gilt für die Strömungsgeschwindigkeit

$$w_1 = w_2 = \text{konst.} \quad \text{Gl. 7-40}$$

und aufgrund der konstanten geodätischen Höhe z von Pumpenein- und -austritt:

$$z_1 = z_2 = \text{konst.} \quad \text{Gl. 7-41}$$

vereinfacht sich Gl. 7-39 zu:

$$\frac{p_1}{\rho} + w_{t12} = \frac{p_2}{\rho} \quad \text{Gl. 7-42}$$

Gl. 7-42, aufgelöst nach der spezifischen technischen Arbeit w_{t12} , lautet:

$$w_{t12} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

Gl. 7-43

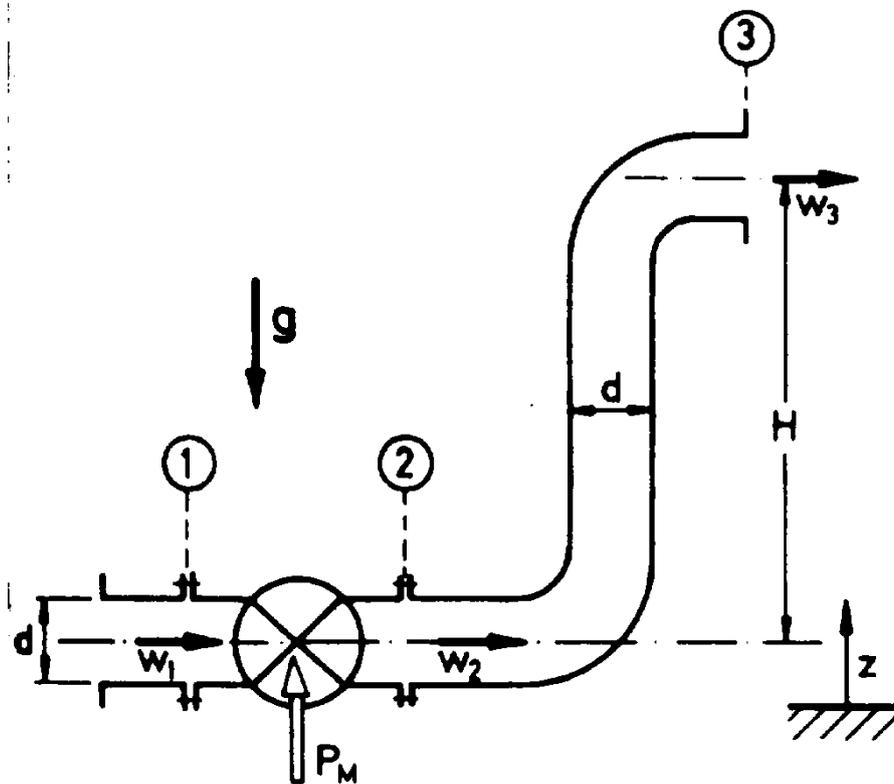


Abb. 7-11: Pumpe in einer Rohrströmung mit dem Eintrittsstutzen (1), dem Austrittsstutzen (2) und einer weiteren Stelle weiter stromabwärts in der Rohrleitung mit konstantem Strömungsquerschnitt

Die spezifische Stutzenarbeit Y ist dann ebenfalls

$$Y = w_{t12} = \frac{\Delta p_{12}}{\rho}$$

Gl. 7-44

Die ins Fluid übertragene Leistung P_M ist das Produkt aus spezifischer Stutzenarbeit und Fluidmassenstrom \dot{m} :

$$P_M = \dot{m} \cdot w_{t12} = \dot{m} \cdot Y$$

Gl. 7-45

und mit dem Volumenstrom \dot{V}

$$\dot{V} = w \cdot A$$

Gl. 7-46

$$P_M = \dot{V} \cdot \rho \cdot Y = \dot{V} \cdot \Delta p_{12}$$

Gl. 7-47

Die Förderhöhe H der Pumpe

Wenn für die in Abb. 7-11 abgebildete Anlage die Förderhöhe bestimmt werden soll mit

$$w_1 = w_2 = w_3 = \text{konst. und } p_1 = p_3 \quad \text{Gl. 7-48}$$

schreibt man die Bernoulli-Gleichung zwischen (1) und (3):

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + w_{t13} = \frac{w_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + g \cdot z_3 \quad \text{Gl. 7-49}$$

Da die Strömungsgeschwindigkeiten und die Drücke jeweils gleich sind, vereinfacht sich Gl. 7-49 zu:

$$g \cdot z_1 + w_{t13} = g \cdot z_3 \quad \text{Gl. 7-50}$$

Die spezifische technische Arbeit w_{t13} ergibt sich damit wie folgt:

$$w_{t13} = w_{t12} = Y = g \cdot (z_3 - z_1) \quad \text{Gl. 7-51}$$

Dabei ist die Differenz von z_1 und z_3 die überwundene Höhendifferenz und damit die Förderhöhe H :

$$g \cdot H = Y = \frac{\Delta p_{12}}{\rho} \quad \text{Gl. 7-52}$$

Zwischen den Stellen (2) und (3) gilt das Gleiche, allerdings sind p_2 und p_3 nicht gleich, denn die Pumpe hat den Druck von (1) nach (2) erhöht:

$$\frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{w_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + g \cdot z_3 \quad \text{Gl. 7-53}$$

$$\frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{p_3}{\rho} + g \cdot z_3 \quad \text{Gl. 7-54}$$

$$\frac{\Delta p_{12}}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = g \cdot (z_3 - z_2) = g \cdot H = w_{t12} \quad \text{Gl. 7-55}$$

Die Förderhöhe ist

$$H = \frac{Y}{g} \quad \text{Gl. 7-56}$$

Die Förderhöhe H einer Pumpe ist die geodätische Höhendifferenz, über die sie ein Fluid bei gleichem Ein- und Austrittsdruck und der gleichen Ein- und Austrittsgeschwindigkeit in reibungsloser Strömung fördern kann.

Der Wirkungsgrad η_P der Pumpe

Der Wirkungsgrad einer Pumpe ist der Quotient aus der mechanisch ans Fluid übertragenen Leistung P_M und Wellenleistung P :

$$\eta_P = \frac{P_M}{P} = \frac{\dot{m} \cdot Y}{P} = \frac{\dot{m} \cdot g \cdot H}{P} \leq 1 \quad \text{Gl. 7-57}$$

und ist kleiner als eins.

7.3.3 Kraftmaschinen in der Rohrströmung (Turbine)

In Abb. 7-12 ist eine Anlage dargestellt, in der ein inkompressibles Fluid mit konstanter Geschwindigkeit von der Stelle (1) zum Eintritt (2) einer Turbine gelangt, diese passiert und über den Austritt (3) verlässt. Die Drücke an den Stellen (1) und (3) sind gleich.

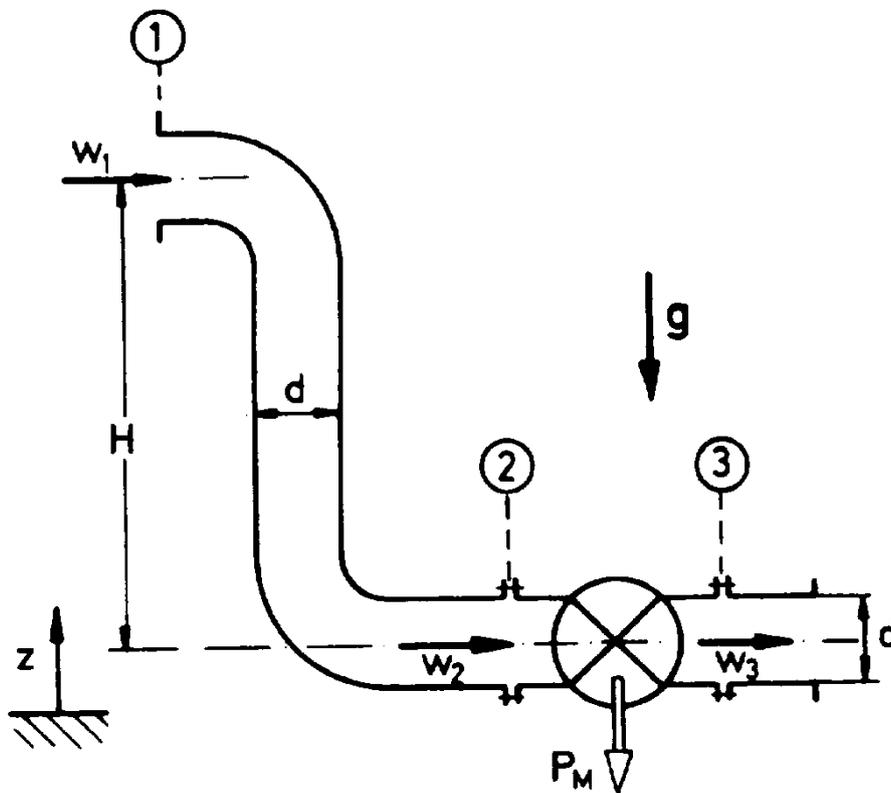


Abb. 7-12: Turbine in einer Rohrströmung mit dem Eintrittsstutzen (2), dem Austrittsstutzen (3) und einer weiteren Stelle weiter stromaufwärts in der Rohrleitung mit konstantem Strömungsquerschnitt

Spezifische Stutzenarbeit und Leistung der Turbine

Die Energiegleichung lautet:

$$\text{Turbineneintritt} - \text{Energieabfuhr} = \text{Turbinenaustritt} \quad \text{Gl. 7-58}$$

Die Bernoulli-Gleichung in der Geschwindigkeitsform für die Turbine (Kraftmaschine) zwischen dem Eintrittsstutzen (2) und dem Austrittsstutzen (3) lautet somit:

$$\frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 - w_{t23} = \frac{w_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + g \cdot z_3 \quad \text{Gl. 7-59}$$

Mit dem konstanten Strömungsquerschnitt gilt für die Strömungsgeschwindigkeit

$$w_1 = w_2 = w_3 = \text{konst.} \quad \text{Gl. 7-60}$$

und aufgrund der konstanten geodätischen Höhe z von Turbinenein- und -austritt:

$$z_2 = z_3 = \text{konst.} \quad \text{Gl. 7-61}$$

vereinfacht sich Gl. 7-59 Gl. 7-39 zu:

$$\frac{p_2}{\rho} - w_{t23} = \frac{p_3}{\rho} \quad \text{Gl. 7-62}$$

Gl. 7-62, aufgelöst nach der spezifischen technischen Arbeit w_{t23} , lautet:

$$w_{t23} = \frac{p_2 - p_3}{\rho} \quad \text{Gl. 7-63}$$

Nach der Vorzeichenregel gilt dann für die spezifische Stutzenarbeit:

$$Y = -w_{t23} = \frac{p_3 - p_2}{\rho} \quad \text{Gl. 7-64}$$

Die vom Fluid entnommene Leistung P_M ist das Produkt aus spezifischer Stutzenarbeit und Fluidmassenstrom \dot{m} :

$$P_M = \dot{m} \cdot w_{t23} = -\dot{m} \cdot Y \quad \text{Gl. 7-65}$$

und mit dem Volumenstrom \dot{V}

$$P_M = -\dot{V} \cdot \rho \cdot Y = \dot{V} \cdot \Delta p_{23} \quad \text{Gl. 7-66}$$

Die Fallhöhe H der Turbine

Wenn für die in Abb. 7-12 abgebildete Anlage die Förderhöhe bestimmt werden soll mit

$$w_1 = w_2 = w_3 = \text{konst. und } p_1 = p_3 \text{ und } w_{t13} = w_{t23} \quad \text{Gl. 7-67}$$

schreibt man die Bernoulli-Gleichung zwischen (1) und (2):

$$\frac{p_1}{\rho} + g \cdot (z_1 - z_2) = \frac{p_1}{\rho} + g \cdot H = \frac{p_2}{\rho} \quad \text{Gl. 7-68}$$

Die Fallhöhe H unter der Schwerebeschleunigung ist bei der gegebenen Anlage (keine Geschwindigkeitsänderung, keine Druckänderung zwischen oberer Stelle und Turbinenaustritt) gleich der erzielten spezifischen technischen Arbeit w_{t23} :

$$g \cdot H = w_{t23} = -Y = -\frac{\Delta p_{23}}{\rho} \quad \text{Gl. 7-69}$$

Die Fallhöhe ist die geodätische Höhendifferenz, die notwendig wäre, um bei gleichem Eintritts- und Austrittsdruck und der gleichen Ein- und Austrittsgeschwindigkeit in reibungsloser Strömung die Turbinenleistung P_M zu erzeugen:

$$H = \frac{w_{t23}}{g} = -\frac{Y}{g} \quad \text{Gl. 7-70}$$

Der Wirkungsgrad η_T der Turbine

Der Wirkungsgrad einer Turbine ist der Quotient aus der Wellenleistung P und der negativ mechanisch aus dem Fluid entnommenen (negativen) Leistung $-P_M$:

$$\eta_T = -\frac{P}{P_M} = \frac{P}{\dot{m} \cdot Y} = -\frac{P}{\dot{m} \cdot g \cdot H} \leq 1 \quad \text{Gl. 7-71}$$

und ist kleiner als eins.

7.4 Inkompressible reibungsbehaftete Strömung ohne Energiezufuhr

Inkompressible reibungsbehaftete Strömungen treten in allen realen Anwendungen auf. Durch die beim Durchströmen auftretende Reibung entstehen Verluste, die sich als Temperaturzunahme und als Verringerung des Druckes stromabwärts äußern.

Der Druck im Fluid nimmt also ab auf der durchströmten Strecke, während die Wärme in gleichem Maße (der Energie) zunimmt. Als Verlust wird dieser Zusammenhang der Druckabnahme und Temperaturzunahme bezeichnet, da dies ein Verlust an der Arbeitsfähigkeit – den gewöhnlichen Nutzen der Fluidströmung – des Fluids darstellt.

Die aus Abschn. 7.2 bekannte vereinfachte Form der Bernoulli-gleichung (Gl. 7-9) wird um den Verlustterm erweitert:

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 + \text{Verluste} \quad \text{Gl. 7-72}$$

Die Druckform lautet

$$\frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \frac{\rho}{2} \cdot w_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \Delta p_{V12} \quad \text{Gl. 7-73}$$

Der Druck p_2 am Ende der betrachteten Stromröhre ist um den Druckabfall Δp_{V12} kleiner als bei reibungsfreier Strömung. Obige Gl. 7-73, geteilt durch die Dichte ρ , ergibt:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \varphi_{12} \quad \text{Gl. 7-74}$$

mit der spezifischen Dissipation (lat. für „Zerstreuung“) φ_{12} :

$$\varphi_{12} = \frac{\Delta p_{V12}}{\rho} \quad \text{Gl. 7-75}$$

Verluste werden in zwei verschiedene Durchströmelemente klassifiziert:

- Gerades Rohr
- Rohrleitungselemente (Einbauelemente)

Betrachtet wird ein Rohrsystem mit mehreren Abschnitten (siehe Abb. 7-13). Die gesamte Dissipation φ_{ges} (oder der gesamte Druckabfall/Druckverlust Δp_V) ist gleich der Summe der Verluste aller Teilsysteme.

Die in Abb. 7-13 dargestellte Anlage besteht aus folgenden Teilabschnitten

- Gerade Rohrabschnitte R_1, R_2, R_3 mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- Rohrkrümmer K_1, K_2 mit ζ_{K1}, ζ_{K2}
- Einbauelement Diffusor E_1 mit ζ_{Diff}
- Einbauelement Düse E_2 mit $\zeta_{Düse}$

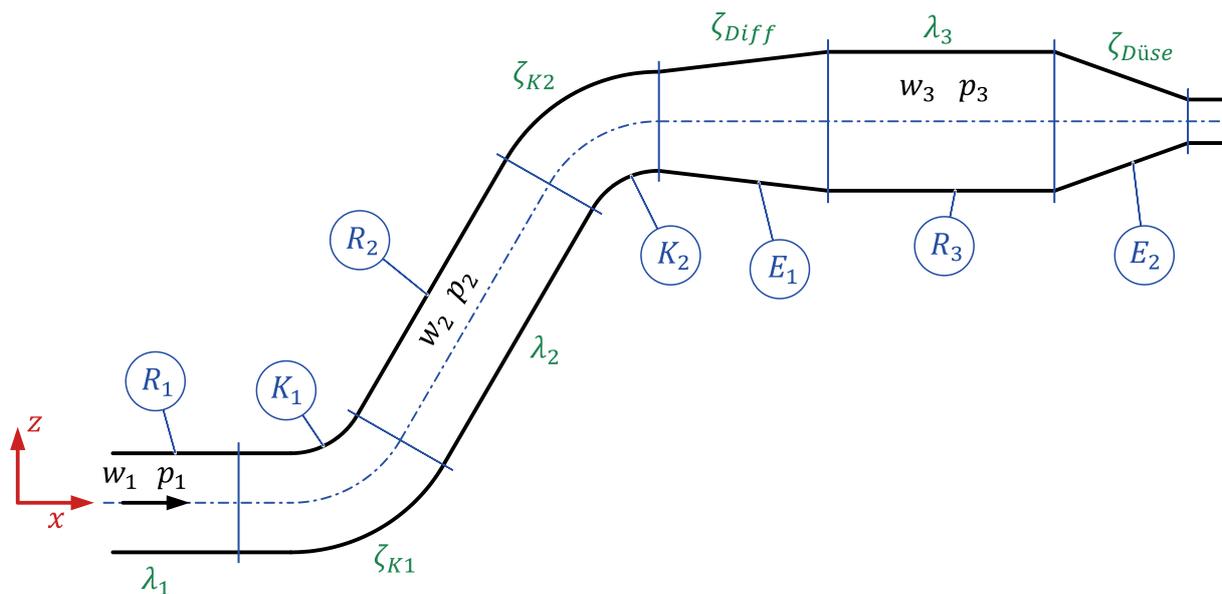


Abb. 7-13: Rohrströmung mit Pumpe und Einbauelementen

Der Gesamtverlust bei Rohrleitungen mit Übergängen und Rohrreibung resultiert aus der Summe der einzelnen Elementen:

$$\varphi_{ges} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{w_i^2}{2} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \cdot \frac{w_i^2}{2} \quad \text{Gl. 7-76}$$

wobei l_i die Länge und d_i der Durchmesser des jeweiligen Rohrabschnitts sind.

Der Druckverlust ergibt sich aus der Multiplikation von Gl. 7-76 mit der Fluidichte ρ :

$$\Delta p_{ges} = \rho \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{w_i^2}{2} + \rho \cdot \sum_{i=1}^n \zeta_i \cdot \frac{w_i^2}{2} \quad \text{Gl. 7-77}$$

Strömungen können in zwei verschiedenen Formen auftreten. Die eine Form ist die laminare Strömung, bei der keine sichtbaren Verwirbelungen oder Querströmungen auftreten. Die andere Form ist die turbulente Strömung mit Verwirbelungen in verschiedenen Größen.

Durch eine bedeutende Ähnlichkeitskennzahl, die **Reynolds-Zahl Re** (siehe Abschn. 10.2), lässt sich anhand der Dimension und der Strömungsgeschwindigkeit die Strömung als laminar oder turbulent unterscheiden.

$$Re = \frac{\rho \cdot w \cdot d}{\eta} = \frac{w \cdot d}{\nu} \quad \text{Gl. 7-78}$$

$Re \leq 2320$ → laminare Strömung

$Re > 2320$ → turbulente Strömung

Für den Verlustbeiwert λ gilt bei laminarer Strömung (**nur bei laminarer!**):

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (\text{siehe nächsten Abschn. 7.5}) \quad \text{Gl. 7-79}$$

7.5 Reibungsbehaftete Rohrströmung

7.5.1 Druckverlust in Rohrleitungen bei laminarer Strömung

Bei laminarer Rohrströmung lässt sich der Reibungsverlust theoretisch berechnen, was bei der turbulenten Strömung nicht mehr der Fall ist. In Abb. 7-14 ist eine horizontale Rohrleitung mit kreisförmigem Querschnitt dargestellt.

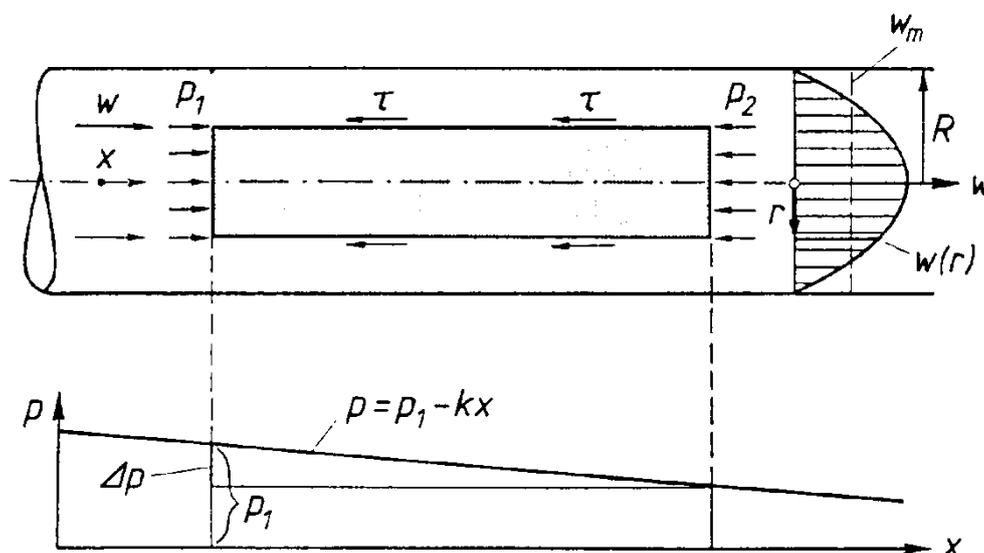


Abb. 7-14: Laminare Rohrströmung

Wir betrachten einen von der ausgebildeten Rohrströmung herausgeschnittenen gedachten Teilzylinder mit dem Radius r und der Länge L und bringen an ihm die Schubspannungen und Druckkräfte an.

Der Druck nimmt linear in Strömungsrichtung ab, da der infolge Reibung entstehende Druckabfall überwunden werden muss. Bei stationärer Strömung muss der Flüssigkeitszylinder im Gleichgewicht sein. Druck- und Reibungskräfte müssen sich das Gleichgewicht halten.

Die Druckkraft wirkt auf die Fläche A in x -Richtung:

$$(p_1 - p_2) \cdot A = (p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 \quad \text{Gl. 7-80}$$

Die Reibungskraft wirkt auf den Mantel in x -Richtung:

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \tau = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{dw}{dr} \quad \text{Gl. 7-81}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Kräfte (für τ siehe Abschn. 5.1) erhält man folgende, die Geschwindigkeitsverteilung beschreibende Differentialgleichung:

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{dw}{dr} \quad \text{Gl. 7-82}$$

$$dw = \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot \eta \cdot L} \cdot r \cdot dr \quad \text{Gl. 7-83}$$

Das Integral liefert für w :

$$w = \int_r^R \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot \eta \cdot L} \cdot r \cdot dr = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot r^2 \Big|_r^R \quad \text{Gl. 7-84}$$

Für den Bereich bis zum äußeren Radius R des gedachten Zylinders ist w :

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot (R^2 - r^2) \quad \text{Gl. 7-85}$$

Die maximale Geschwindigkeit w_{max} tritt im Zentrum auf ($r = 0$):

$$w_{max} = w(r = 0) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2 \quad \text{Gl. 7-86}$$

Die mittlere Geschwindigkeit w_m entspricht dabei genau

$$w_m = \frac{1}{2} w_{max} = \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2 = \frac{p_1 - p_2}{32 \cdot \eta \cdot L} \cdot D^2 \quad \text{Gl. 7-87}$$

Aus der nachfolgenden Gl. 7-88 wird der Druckverlust bei laminarer Strömung bestimmt.

$$p_1 - p_2 = \Delta p_V = 32 \cdot \frac{w_m \cdot \eta \cdot L}{D^2} \quad \text{Gl. 7-88}$$

Der Volumenstrom \dot{V} errechnet sich dann aus:

$$\dot{V} = w_m \cdot A = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2 = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot (p_1 - p_2) \quad \text{Gl. 7-89}$$

und ist proportional zum Druckunterschied zwischen Rohranfang und Rohrende und zur vierten Potenz des Radius und umgekehrt proportional zur Rohrlänge und zur dynamischen Viskosität des Strömungsmediums (**Hagen-Poiseuillesches Gesetz**).

Daraus ergibt sich der Druckverlust bei laminarer Strömung zu:

$$\Delta p = 8 \cdot \frac{\eta \cdot L \cdot \dot{V}}{\pi \cdot R^4} = 128 \cdot \frac{\eta \cdot L \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^4} \quad \text{Gl. 7-90}$$

Mit

$$\dot{V} = w_m \cdot A = w_m \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad \text{Gl. 7-91}$$

folgt aus Gl. 7-90

$$\Delta p = 128 \cdot \frac{\eta \cdot L}{\pi \cdot D^4} \cdot w_m \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = \frac{128}{4} \cdot \frac{\pi \cdot \eta \cdot L}{\pi} \cdot \frac{D^2}{D^4} \cdot w_m \quad \text{Gl. 7-92}$$

$$\Delta p = \frac{64 \cdot \eta \cdot L}{2 \cdot D^2} \cdot w_m \quad \text{Gl. 7-93}$$

Die dynamische Viskosität η ist die mit der Dichte ρ multiplizierte kinematische Viskosität ν :

$$\eta = \nu \cdot \rho \quad \text{Gl. 7-94}$$

wodurch der Druckverlust nach Gl. 7-93 mit dem im Zusammenhang mit der Strömungslehre bekannten Term $\rho/2$ erweitert wird:

$$\Delta p = \frac{64 \cdot \rho \cdot \nu \cdot L}{2 \cdot D^2} \cdot w_m = 64 \cdot \left(\frac{L}{D}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{2}\right) \cdot w_m^2 \cdot \left(\frac{\nu}{D \cdot w_m}\right) \quad \text{Gl. 7-95}$$

Nach Gl. 10-1 (siehe Abschn. 10.2) folgt für den Kehrwert der Reynolds-Zahl:

$$\frac{1}{Re} = \left(\frac{\nu}{D \cdot w}\right) \quad \text{Gl. 7-96}$$

Der Druckverlust lässt sich dann direkt mithilfe der Reynolds-Zahl berechnen:

$$\Delta p_V = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \quad \text{Gl. 7-97}$$

mit dem Term $64/Re$, der als Rohrreibungszahl λ bezeichnet wird:

$$\frac{64}{Re} = \lambda \quad \text{Gl. 7-98}$$

Der Druckverlust in Rohrleitungsabschnitten wird wie folgt berechnet:

$$\Delta p_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \quad \text{Gl. 7-99}$$

Diese Formel gilt auch für die turbulente Strömung, nur lässt sich die Rohrreibungszahl λ nicht mehr mithilfe der Reynolds-Zahl berechnen.

7.5.2 Rohrreibungszahl (Widerstandszahl)

Als Maß für die Dissipation in der Rohrströmung ist die Rohrreibungszahl λ eingeführt worden. Die Abhängigkeit der Rohrreibungszahl λ von der Reynolds-Zahl Re ist im Rohrwiderstandsdiagramm (siehe Abb. 7-15) nach der Blasiuschen Gleichung, der Prandtlschen Gleichung und der Colebrookschen Gleichung dargestellt. Dabei ist auch der Einfluss der Wandrauhigkeit aufgenommen. Diese ist durch die Rauigkeitshöhe k_S gekennzeichnet.

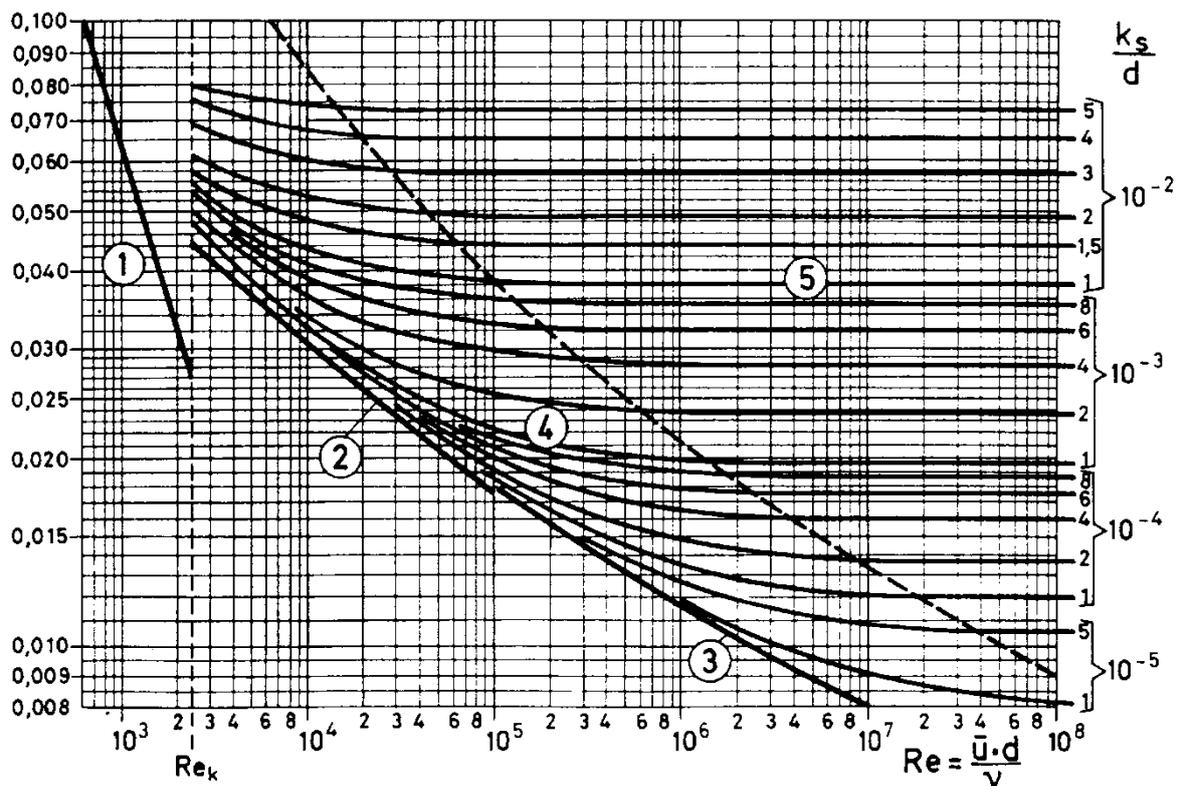


Abb. 7-15: Rohrreibungszahl nach der Colebrookschen Formel

Im Diagramm sind zwei Hauptbereiche dargestellt, einer für laminare und einer für turbulente Strömung. Es werden fünf Kurvenbereiche unterschieden. Die Formeln für die Berechnung der Rohrreibungszahl λ lauten:

Bereich (1) – Hagen-Poiseuille: Laminar, **hydraulisch glatt**, $Re < 2320$

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re} \quad \text{Gl. 7-100}$$

Bereich (2) – Blasius: Turbulent, **hydraulisch glatt**, $2320 < Re < 10^5$

$$\lambda_{turb} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad \text{Gl. 7-101}$$

Bereich (3) – Prandtl: Turbulent, **hydraulisch glatt**, $10^5 < Re < 10^7$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 2,03 \cdot \log(Re \cdot \sqrt{\lambda_{turb}}) - 0,8 \quad \text{Gl. 7-102}$$

Bereich (4) – Colebrook: Turbulent, **mit Rauigkeit**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 1,74 - 2 \cdot \log\left(\frac{2 k_S}{d} + \frac{18,7}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{turb}}}\right) \quad \text{Gl. 7-103}$$

Bereich (5) – von Karman-Nikuradse: Turbulent, **mit Rauigkeit**, unabhängig von Re

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 1,74 - 2 \cdot \log \frac{2 k_S}{d} \quad \text{Gl. 7-104}$$

Kurve 1 (Bereich (1)) entspricht der laminaren Strömung $Re < Re_{kr}$.

Die Kurven 2 und 3 gelten, wenn die Rauigkeit keinen Einfluss hat (das Rohr hydraulisch glatt ist), bei Kurve 2 bis $Re = 10^5$.

Bei Reynolds-Zahlen über 10^5 gilt Kurve 3. Die **Rauigkeit ist so klein**, dass sie den Rohrwiderstand nicht beeinflusst. Man bezeichnet die Wand dann als **hydraulisch glatt**.

Ist die Rauigkeit k_S groß genug, um die Rohrreibung zu beeinflussen, sind wieder zwei Bereiche zu unterscheiden. Im Bereich (4) hängt λ sowohl von der Reynolds-Zahl als auch von der relativen Sandrauigkeit k_S/d ab.

Im Bereich (5) ist der Widerstand von der Viskosität praktisch unabhängig.

7.5.3 Druckverluste in Rohrelementen – Verlustkoeffizient

7.5.3.1 Grundgleichung

$$\Delta p_V = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \quad \text{Gl. 7-105}$$

7.5.3.2 Plötzliche, sprunghafte Rohrerweiterung

Der Druckverlust in einer sprunghaften Rohrerweiterung (siehe Abb. 7-16) ist folgendermaßen definiert:

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} \cdot (w_1 - w_2)^2 \quad \text{Gl. 7-106}$$

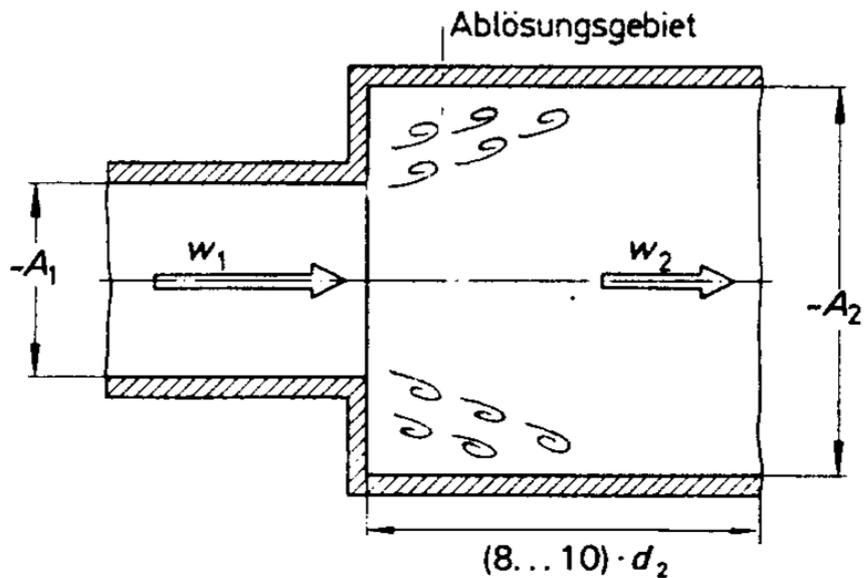


Abb. 7-16: Rohrerweiterung (Carnot-Diffusor)

Setzt man die obige Gleichung mit der Grundgleichung (Gl. 7-105):

$$\Delta p_V = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 \quad \text{Gl. 7-107}$$

gleich, so erhält man für den Verlustkoeffizienten ζ :

$$\zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 = \frac{\rho}{2} \cdot (w_1 - w_2)^2 \quad \text{Gl. 7-108}$$

mit

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad \rightarrow \quad w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad \text{Gl. 7-109}$$

und gekürzt durch $\rho/2$

$$\zeta \cdot w_1^2 = \left(w_1 - w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = w_1^2 \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad \text{Gl. 7-110}$$

und damit

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad \text{Gl. 7-111}$$

Diese Gleichung stellt die Widerstandszahl ζ einer plötzlichen Rohrerweiterung dar, bezogen auf die größere Geschwindigkeit w_1 im Rohr.

7.5.3.3 Plötzliche, sprungartige Rohrverengung (Kontraktion)

Bei einer plötzlichen Verengung in der Rohrleitung (siehe Abb. 7-17) tritt vor und nach der Kontraktion eine Separation der Strömung auf. Dadurch schafft sich die Strömung selbst einen glatten Übergang. Als Folge ist der minimale Querschnitt $A_0 = A_{min}$ kleiner als A_2 .

Bei der plötzlichen Kontraktion wird der Druckverlust hauptsächlich durch die Expansion von A_0 auf A_2 nach der Kontraktion verursacht. Daher kann man den Druckverlust durch denjenigen des Carnot-Diffusors approximieren.

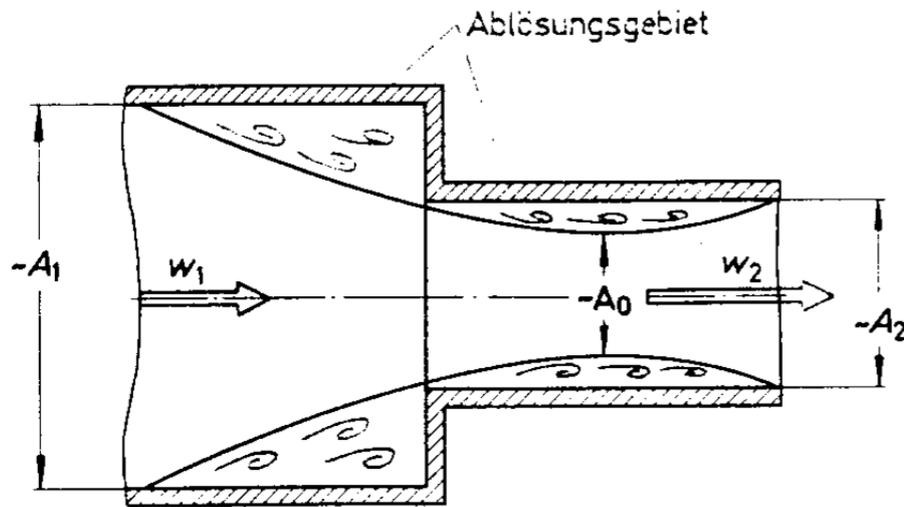


Abb. 7-17: Rohrverengung

Der Druckverlust ergibt sich hier wie folgt: Aus der Beziehung

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} \cdot (w_0 - w_2)^2 \quad \text{Gl. 7-112}$$

ergibt sich für die plötzliche Verengung mit dem „freien“ Kontraktionsquerschnitt A_0 :

$$\zeta = \left(\frac{A_2}{A_0} - 1 \right)^2 \quad \text{Gl. 7-113}$$

7.5.3.4 Allmähliche Rohrerweiterung (Diffusor) und allmähliche Rohrverengung (Konfusor, Düse)

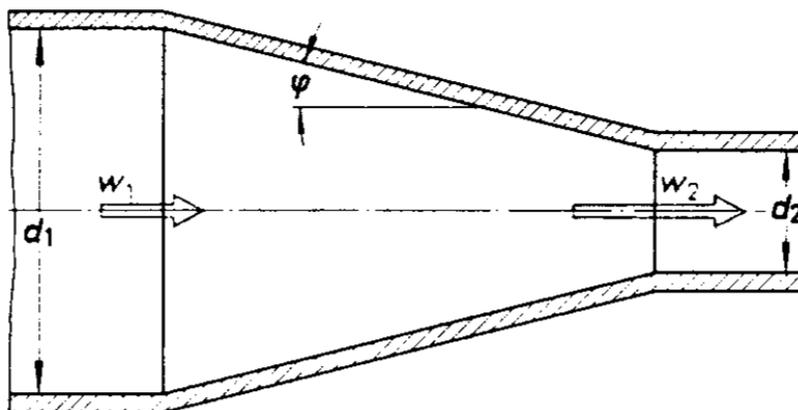


Abb. 7-18: Allmähliche Rohrverengung (Düse, Konfusor)

Die Reibungsverluste in einem Diffusor oder in einer Düse (siehe Abb. 7-18) werden durch den Verlustkoeffizienten ζ wie folgt erfasst:

$$\zeta = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad \text{Gl. 7-114}$$

Allgemein gilt für die Widerstandszahl (den Verlustkoeffizienten):

Die Widerstandszahl ζ ist eine Funktion von folgenden Faktoren:

- Rohrrauhigkeit
- Reynolds-Zahl Re
- des Winkels φ
- Durchmesser Verhältnis d_1/d_2 .

10 Grundlegende Strömungserscheinungen

10.1 Vorbetrachtungen (Turbulenz)

Die bisher aufgestellten Erhaltungssätze für

- Masse
- Energie
- Impuls

liefern nur globale Aussagen über das gesamte Fluid im gewählten Kontrollraum.

Der restliche Teil der Vorlesung ist den lokalen Aussagen über Strömungen gewidmet. Es werden Einzelheiten der Strömung in der unmittelbaren Umgebung eines beliebig gewählten Punktes betrachtet.

Turbulenz

Es gibt zwei verschiedene Strömungsformen, laminare und turbulente Strömungen. Kennzeichen der turbulenten Strömungsform ist eine unregelmäßige, zufallsbedingte Schwankungsbewegung, die einer geordneten Grundströmung überlagert ist.

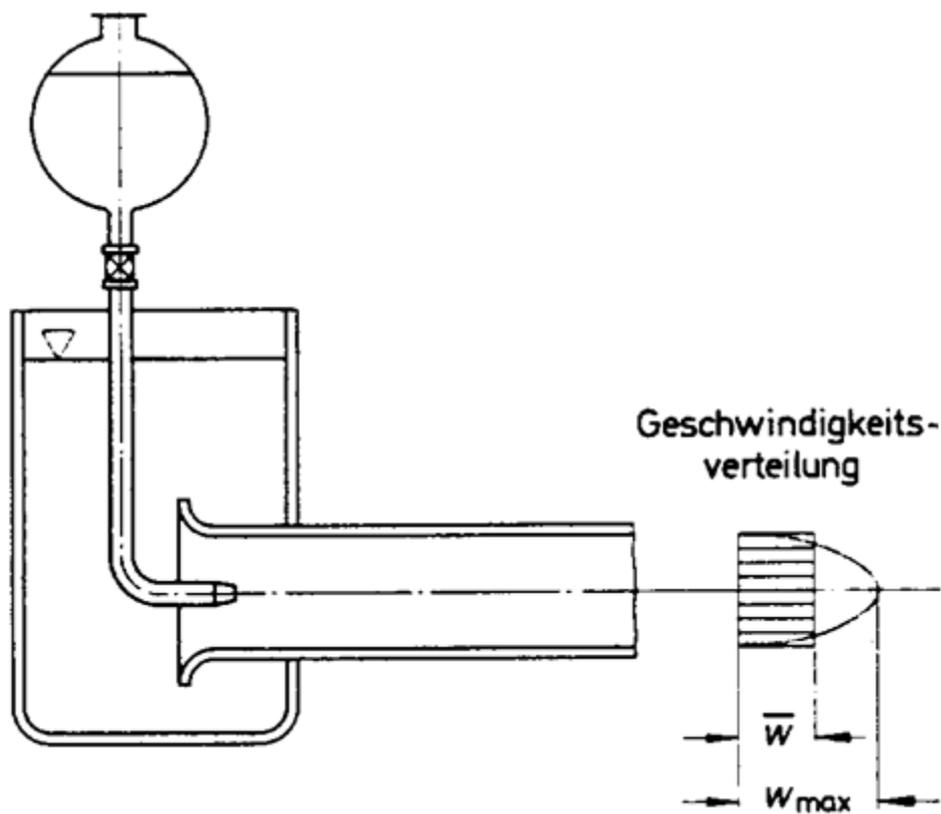


Abb. 10-1: Versuch von Reynolds (laminare Strömung)

Die Teilchen bewegen sich auf zur Rohrachse parallelen Stromlinien, ohne sich untereinander zu vermischen (Grundströmung). Ein in die Rohrachse eingeleiteter Farbstrahl mischt sich nicht mit der Grundströmung.

An einer Berührungsstelle zwischen dem Festkörper und dem Fluid herrscht immer eine Haftbedingung, das heißt, die Geschwindigkeit des Fluids an dieser Stelle ist null.

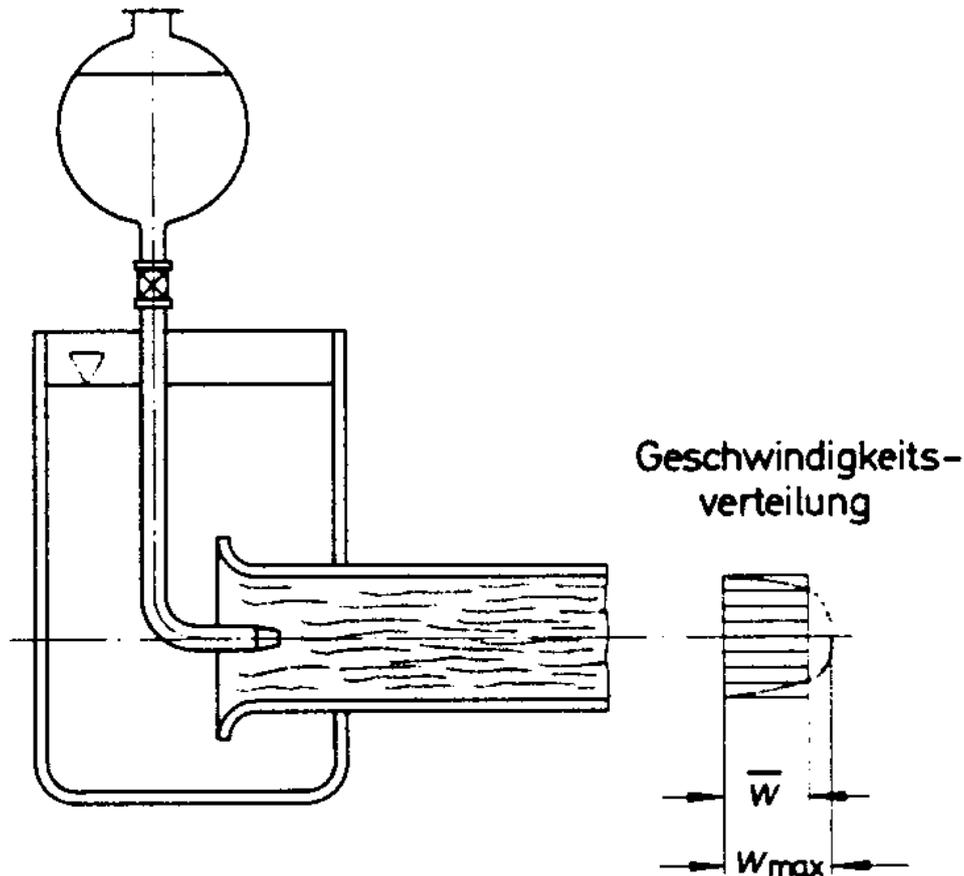


Abb. 10-2: Versuch von Reynolds (turbulente Strömung)

Neben der in Rohrachse gerichteten Transportbewegung treten noch Querbewegungen auf, die zu einer ständigen Vermischung der Strömungsteilchen führen. Der Farbstrahl zerreißt und vermischt sich mit der Grundströmung.

Bisher wurde angenommen, dass die Geschwindigkeit in einer Rohrströmung konstant ist (siehe Abb. 10-3):

- Eindimensionales „Feld“
- Globale Aussage über das gesamte Feld

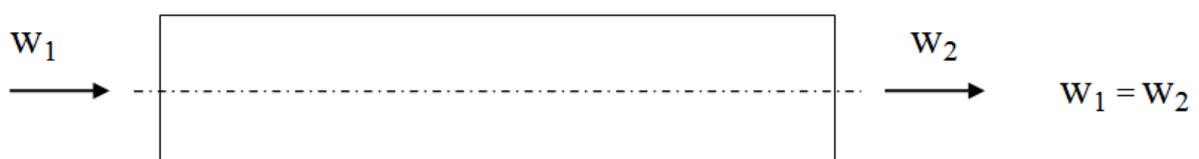


Abb. 10-3: Eindimensionales „Feld“ einer Rohrströmung

Wenn jedoch die Haftbedingung gilt, muss die Geschwindigkeit an der Wand null werden, daher herrscht in einer Rohrströmung keine konstante Geschwindigkeit, wie für Stromröhren bisher angenommen wurde, sondern es besteht eine **Geschwindigkeitsverteilung**.

Die Geschwindigkeitsverteilungen für laminare und turbulente Strömungen sind sehr unterschiedlich. Die Geschwindigkeitsprofile turbulenter Strömungen (siehe Abb. 10-4b) sind völliger und wesentlich gleichmäßiger als die vergleichbarer laminarer Strömungen (siehe Abb. 10-4a). Für viele praktische Rechnungen jedoch, insbesondere bei der Anwendung der Stromfadentheorie, wird das Geschwindigkeitsprofil durch eine konstante Geschwindigkeitsverteilung mit gleichem Volumenstrom ersetzt.

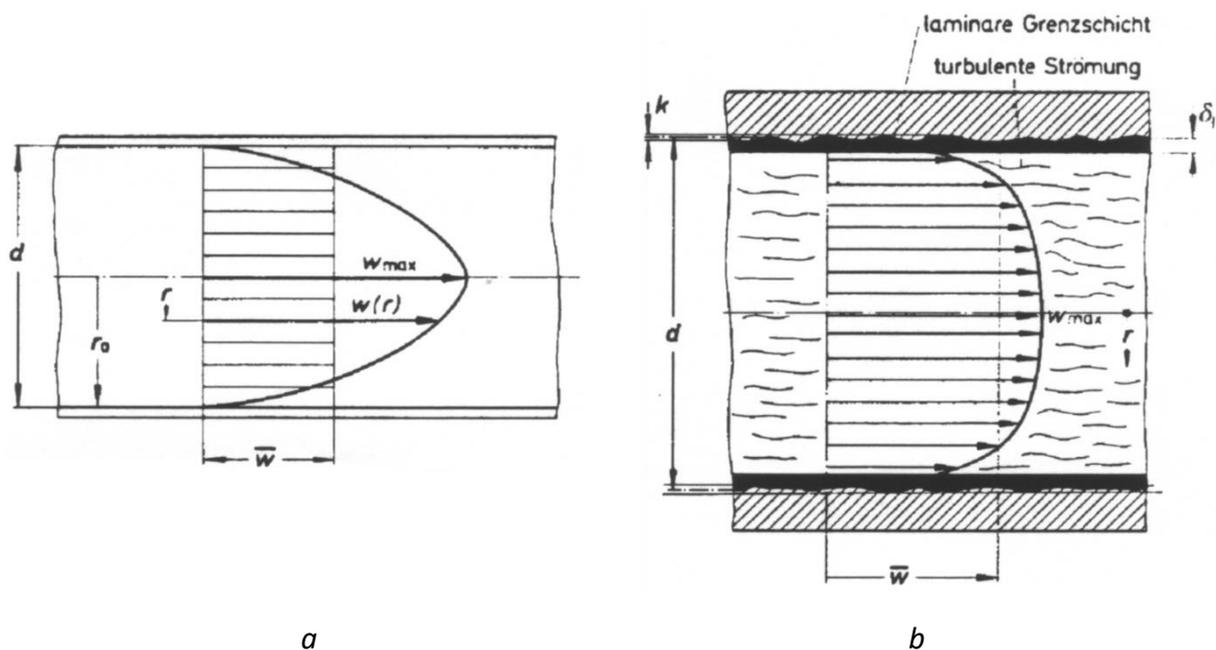


Abb. 10-4: Charakteristisches Geschwindigkeitsprofile einer turbulenten Strömung, a) laminar, b) turbulent

Bei turbulenter Strömung ist \bar{w} größer. Die Entstehung der Turbulenz beruht auf einer Instabilität der Strömung. An jeder Stelle einer Strömung herrscht Gleichgewicht zwischen Trägheitskraft, Druckkraft, Reibungskraft und Schwerkraft. Schwache Störungen der Strömung werden im laminaren Fall von der Reibungskraft gedämpft.

Bei Erhöhung der Geschwindigkeit nimmt die Reibungskraft nicht so stark zu wie die übrigen Kräfte, so dass sie schließlich im Verhältnis zu klein ist, um Störungen zu dämpfen. Die Störung wird angefacht und führt schließlich zur turbulenten Strömungsform.

Man bezeichnet die laminare Strömung als Schichten-Strömung. Schichten von unterschiedlichen Geschwindigkeiten gleiten übereinander.

10.2 Reynolds-Zahl

Der Wechsel von der laminaren in die turbulente Strömungsform hängt von einer mit der mittleren Geschwindigkeit w , dem Rohrdurchmesser d (bzw. einer anderen charakteristischen Länge L , die von der Art der Strömung abhängt), der Dichte ρ und der dynamischen Viskosität η gebildeten dimensionslosen Kennzahl, der Reynolds-Zahl Re , ab:

$$Re = \frac{\rho \cdot w \cdot d}{\eta} = \frac{w \cdot d}{\nu} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{Pa} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{N} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}} = - \right] \quad \text{Gl. 10-1}$$

Ähnlichkeitsmechanik:

Strömungen, deren Reynolds-Zahlen trotz unterschiedlicher geometrischer Größen gleich sind, heißen mechanisch ähnlich. An folgenden Modellen wird die Ähnlichkeitsmechanik angewendet:

- Schiffe
- Automobile
- Flugzeuge
- Weltraumkörper

Strömungen können an einem geometrisch ähnlich verkleinerten bzw. vergrößerten Modell untersucht werden, wenn die Strömungen am Modell und am Original mechanisch ähnlich sind, das heißt gleiche Werte der charakteristischen Kennzahlen aufweisen. In allen Strömungen, in denen die vier Größen Dichte, Geschwindigkeit, Länge und Viskosität eine Rolle spielen, ist die Reynolds-Zahl eine Kennzahl.

Bei der Rohrströmung beträgt die kritische Reynolds-Zahl $Re_{kr} = 2320$.

Es gilt: $Re \leq Re_{kr} \rightarrow$ Die Strömung ist laminar.
 $Re > Re_{kr} \rightarrow$ Die Strömung ist turbulent.

Beispiel 1:

Gegeben ist ein Rohr mit einem Durchmesser von $d = 20$ mm.

Bei welcher Geschwindigkeit w_{kr} setzt turbulente Strömung ein? Untersucht werden sollen eine Wasserströmung $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ und eine Luftströmung $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

$$w_{kr} = Re_{kr} \cdot \frac{\nu}{d} = 2320 \cdot \frac{\nu}{d} \quad \text{Gl. 10-2}$$

Kritische Geschwindigkeit für Wasser:

$$w_{kr,W} = 2320 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{20 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0,116 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kritische Geschwindigkeit für Luft:

$$w_{kr,L} = 2320 \cdot \frac{15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{20 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 1,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Beispiel 2:

Wie groß ist die Reynolds-Zahl im Blutkreislauf des Menschen (Blut: $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$) in der Kapillare ($d = 8 \mu\text{m}$, $w = 5 \text{ mm/s}$) und in der Aorta ($d = 20 \text{ mm}$, $w = 0,3 \text{ m/s}$)?

$$Re = \frac{\rho \cdot w \cdot d}{\eta} \quad (\text{Gl. 10-1})$$

Reynolds-Zahl für die Kapillare:

$$Re = \frac{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}} = 10^{-2}$$

Die Reynolds-Zahl in der Kapillare liegt im unterkritischen Bereich.

Reynolds-Zahl für die Aorta:

$$Re = \frac{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}} = 1,5 \cdot 10^3$$

Die Blutströmung in der Aorta liegt noch im unterkritischen Bereich.

10.3 Die Grenzschicht (Reibungsschicht)

In diesem Kapitel werden die Konsequenzen der Haftung (Haftbedingung) für die Umströmung von Körpern besprochen. Der einfachste und überschaubarste Fall der Grenzschicht liegt bei der längsangeströmten Platte vor (siehe Abb. 10-5). Da die Strömungsgeschwindigkeit an der Wand verschwinden muss (Haftung), sind starke Änderungen der Geschwindigkeit, das heißt, große Geschwindigkeitsgradienten in Wandnähe zu erwarten.

Bei (verschwindend) kleiner Viskosität $\nu \rightarrow 0$ (in ungestörter Außenströmung) ergibt sich eine (unendlich) große Reynolds-Zahl $Re \rightarrow \infty$ mit

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu} \quad (\text{Gl. 10-1})$$

wobei sich die Strömung des Geschwindigkeitsprofils nur auf eine dünne Schicht unmittelbar an der Wand beschränkt. Man spricht deshalb von Reibungsschicht oder Grenzschicht.

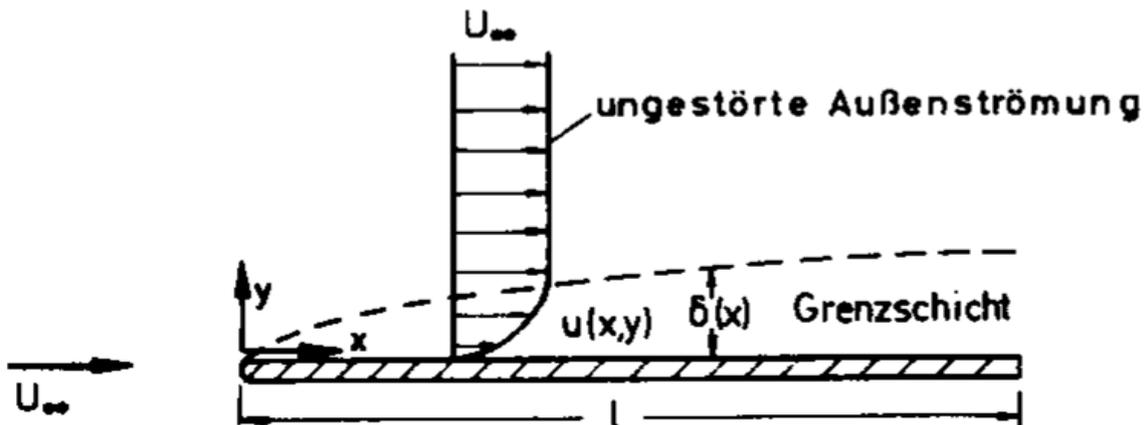


Abb. 10-5: Geschwindigkeitsprofil an der Oberseite einer längsangeströmten ebenen Platte

Vergleicht man Grenzschichtströmung und Strömung im Rohr (siehe Abb. 10-6), dann findet man die Analogie, wenn man die Strömung von der Rohrachse her betrachtet.

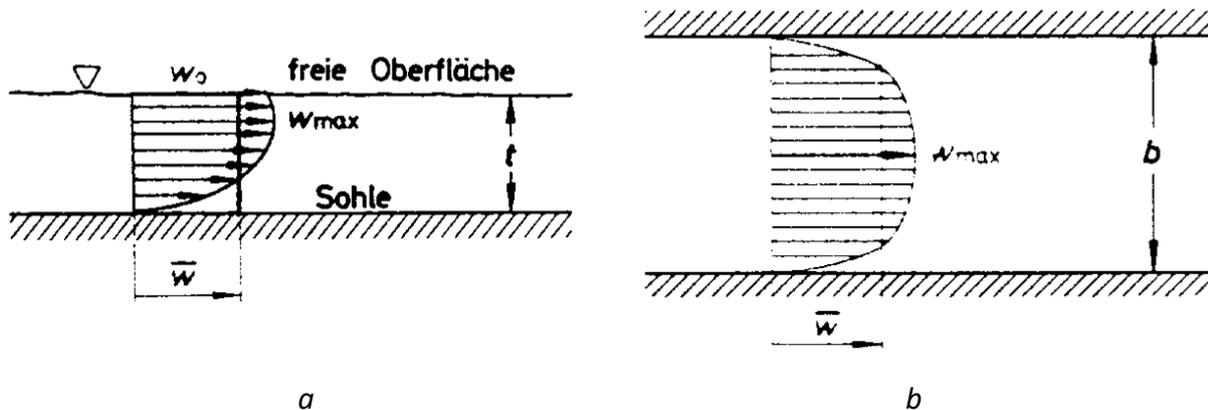


Abb. 10-6: Vergleich der Grenzschichtströmung (a) mit der Strömung im Rohr (b)

Die Grenzschicht entwickelt sich entlang der Kontur des umströmten Körpers, und zwar nimmt im Allgemeinen stromabwärts die Grenzschichtdicke zu. Die Strömung in der Grenzschicht kann ebenso wie die Rohrströmung laminar oder turbulent sein (siehe Abb. 10-7).

Die turbulente Grenzschicht ist dicker als die laminare, reicht also weiter in die Strömung hinaus. Das Geschwindigkeitsprofil ist an der Wand steiler. Die Grenzschichtdicke nimmt nach hinten stetig zu.

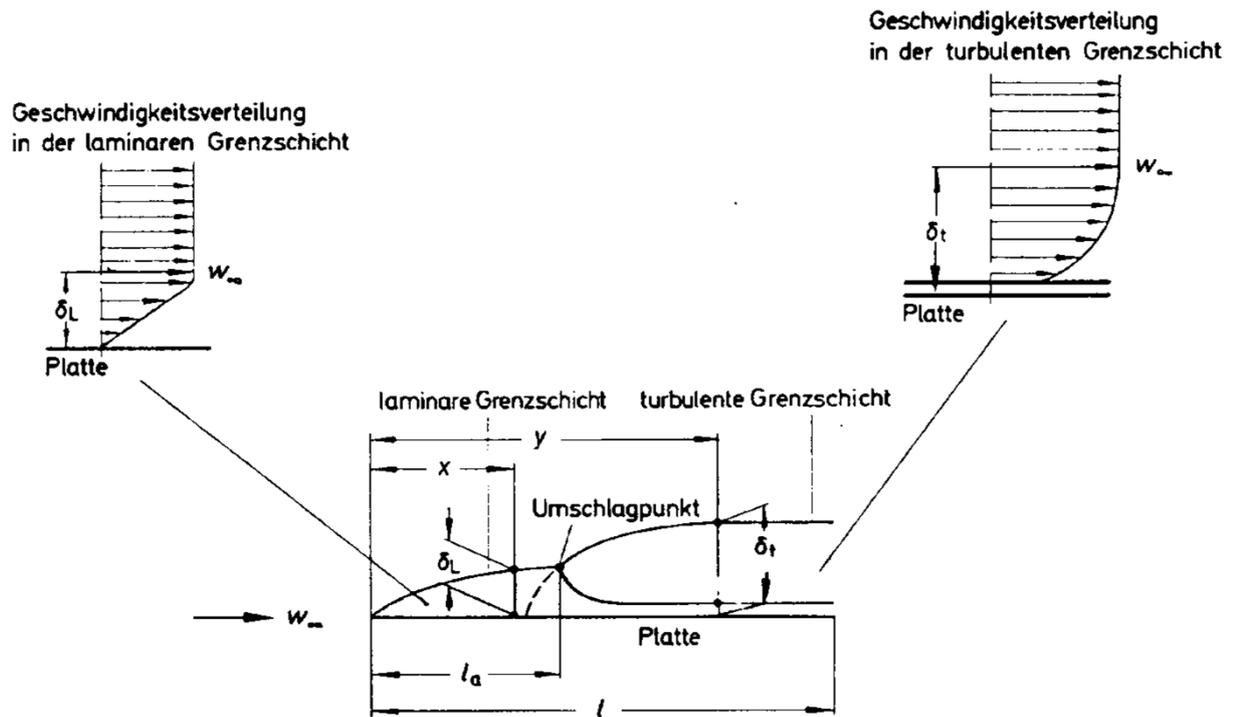


Abb. 10-7: Vergleich der laminaren und turbulenten Grenzschicht an der längsangeströmten Platte

Definitionen der Grenzschichtdicke:

Für einen Zylinder (Durchmesser d , Strömung: laminar) gilt:

1. Im Staupunkt $\delta_1 = 1,2 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{Re_d}}$ Gl. 10-3

2. An der dicksten Stelle $\delta_2 = 1,8 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{Re_d}}$ Gl. 10-4

Für eine Kugel (siehe Abb. 10-8, Durchmesser d , Strömung: laminar) gilt:

1. Im Staupunkt $\delta_1 = 1,06 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{Re_d}}$ Gl. 10-5

2. An der dicksten Stelle $\delta_2 = 1,7 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{Re_d}}$ Gl. 10-6

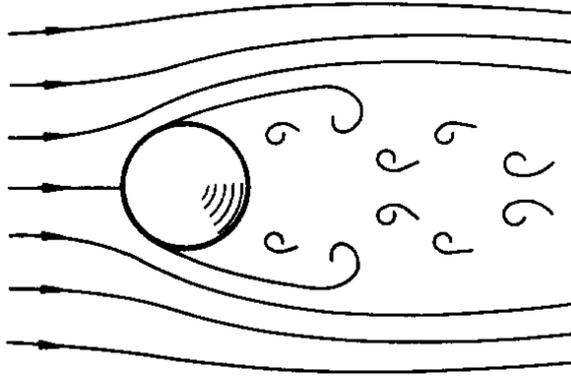


Abb. 10-8: Umströmte Kugel

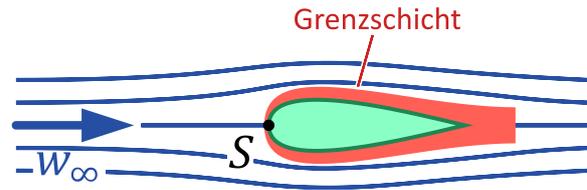


Abb. 10-9: Grenzschicht am umströmten Profil (z. B. Tragfläche, Ruder)

Profil (Tragfläche, Schiffsruder, siehe Abb. 10-9, größte Profildicke d , Strömung: laminar):

$$\delta_1 = 1,2 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{Re_d}} \quad \text{Gl. 10-7}$$

$$Re_d = \frac{w \cdot d}{\nu} \quad \text{Gl. 10-8}$$

Längsangeströmte Platte (siehe Abb. 10-10, Länge L):

$$Re = \frac{w \cdot L}{\nu} \quad \text{Gl. 10-9}$$

$$\delta = 0,37 \cdot Re^{-0,2} \cdot L \rightarrow \text{turbulente Grenzschicht am Ende der Platte} \quad \text{Gl. 10-10}$$

$$\delta = 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot L}{w}} \rightarrow \text{laminar} \quad \text{Gl. 10-11}$$

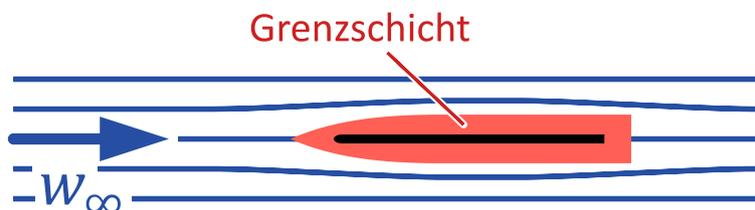


Abb. 10-10: Grenzschicht an der längsangeströmten Platte

Beispiel:

Der Finger (angenähert durch einen Zylinder mit $d = 2$ cm beschrieben) wird mit einer Geschwindigkeit von $w = 0,25$ m/s durch eine Kerzenflamme bewegt (Querströmung). Die

kinematische Viskosität ν beträgt $15,11 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Welche Grenzschichtdicken δ stellen sich in der Luft bei 20°C im Staupunkt (δ_1) und an der dicksten Stelle (δ_2) ein?

Lösung für die Grenzschichtdicke im Staupunkt:

$$\delta_1 = 1,2 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{Re_d}} \quad (\text{Gl. 10-3})$$

$$Re_d = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,02 \text{ m}}{15,11 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 330,9 \quad (\text{Gl. 10-4})$$

$$\delta_1 = 1,2 \cdot 0,02 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{1}{330,9}} = 1,32 \text{ mm}$$

Lösung für die Grenzschichtdicke an der dicksten Stelle:

$$\delta_2 = 1,8 \cdot 0,02 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{1}{330,9}} = 1,98 \text{ mm} \quad (\text{Gl. 10-4})$$

Diese Schichtdicken bieten eine gewisse Zeit Schutz vor den heißen Brenngasen.

Entwicklung der Grenzschicht an einem Tragflächenprofil ($Re = 10^4$, das heißt, ν ist sehr klein)

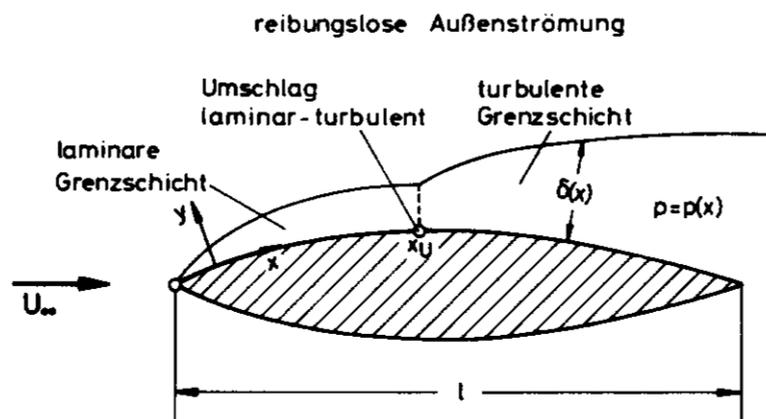


Abb. 10-11: Grenzschicht an einem Tragflächenprofil (Geschwindigkeit $u_\infty \triangleq w_\infty$)

$$Re = \frac{\rho \cdot w_\infty \cdot L}{\eta} = \frac{w_\infty \cdot L}{\nu} \quad \text{Gl. 10-12}$$

Nach einer bestimmten Lauflänge x_U wird die Strömung in der Grenzschicht instabil, da die in der Strömung beteiligten Reibungskräfte zur Dämpfung von Störungen nicht mehr ausreichen. Es kommt zum Umschlag laminar \rightarrow turbulent. Hinter dem Umschlagpunkt ist die

Grenzschicht turbulent. Die Lage des Umschlagpunktes ist festgelegt durch die kritische Reynolds-Zahl,

$$Re_{kr} = \frac{w_\infty \cdot x_U}{\nu} \quad \text{Gl. 10-13}$$

die außerdem von der Körpergeometrie abhängt.

In der Literatur findet man die Werte von $3,2 \cdot 10^5$ bis $3 \cdot 10^6$. Normalerweise ist mit dem unteren Grenzwert zu rechnen. Nur bei besonders störungsfreier Außenströmung wird $3 \cdot 10^6$ erreicht.

Außer der Reynolds-Zahl gibt es noch andere dimensionslose Größen zur Beschreibung der Grenzschicht und damit zur Charakterisierung der Umströmung von Körpern.

Die auf den Staudruck der Anströmgeschwindigkeit bezogene Wandschubspannung heißt Reibungsbeiwert (Strömungswiderstandskoeffizient, Widerstandsbeiwert) c_W und ist wie folgt definiert:

$$c_W = \frac{\tau_W}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2} = \frac{F}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot A} \quad \text{Gl. 10-14}$$

mit der umströmten Referenzfläche A , die bei Fahrzeugen die Stirnfläche ist und in der Flugzeugaerodynamik die Auftriebsfläche (Flügelfläche).

10.4 Umströmung von Körpern

10.4.1 Widerstand und dynamischer Auftrieb

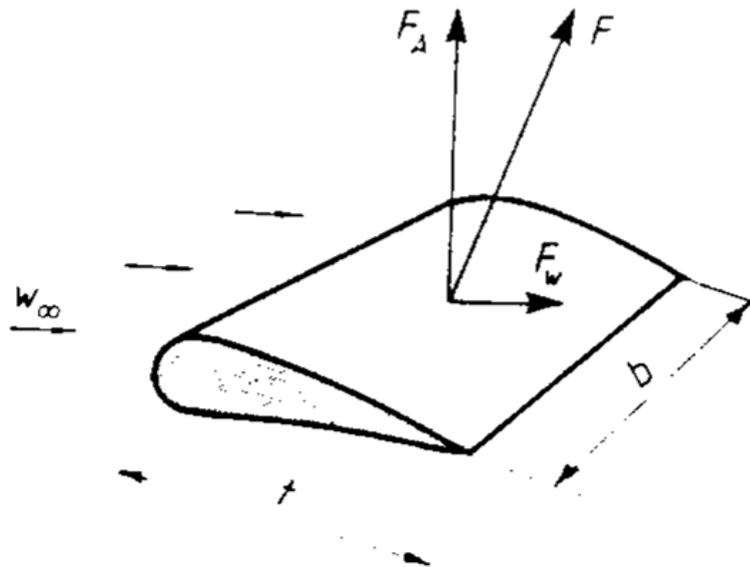


Abb. 10-12: Widerstand und Auftrieb bei Tragflächen

Bei der Umströmung eines Körpers wirkt vom realen Fluid auf den Körper eine Kraft F . Das Ziel ist es, diese Kraft zu berechnen.

In einem gewählten Koordinatensystem (KS) bestehend aus der **Anströmrichtung** (horizontal) und einer Senkrechten dazu (**parallel zur Erdbeschleunigung**) kann diese Kraft in ihre Komponenten zerlegt werden. Die Komponente in Anströmrichtung ist der **Strömungswiderstand F_W** , die Komponente senkrecht dazu und parallel zur Erdbeschleunigung ist der **dynamische Auftrieb F_A** .

Bei plumpen Körpern hat F praktisch die Richtung der Anströmgeschwindigkeit (siehe Abb. 10-13).



Abb. 10-13: Widerstand bei plumpen Körpern

Bei schlanken Körpern, insbesondere bei Tragflächen, kann die Richtung von F erheblich von w_∞ abweichen (siehe Abb. 10-14).

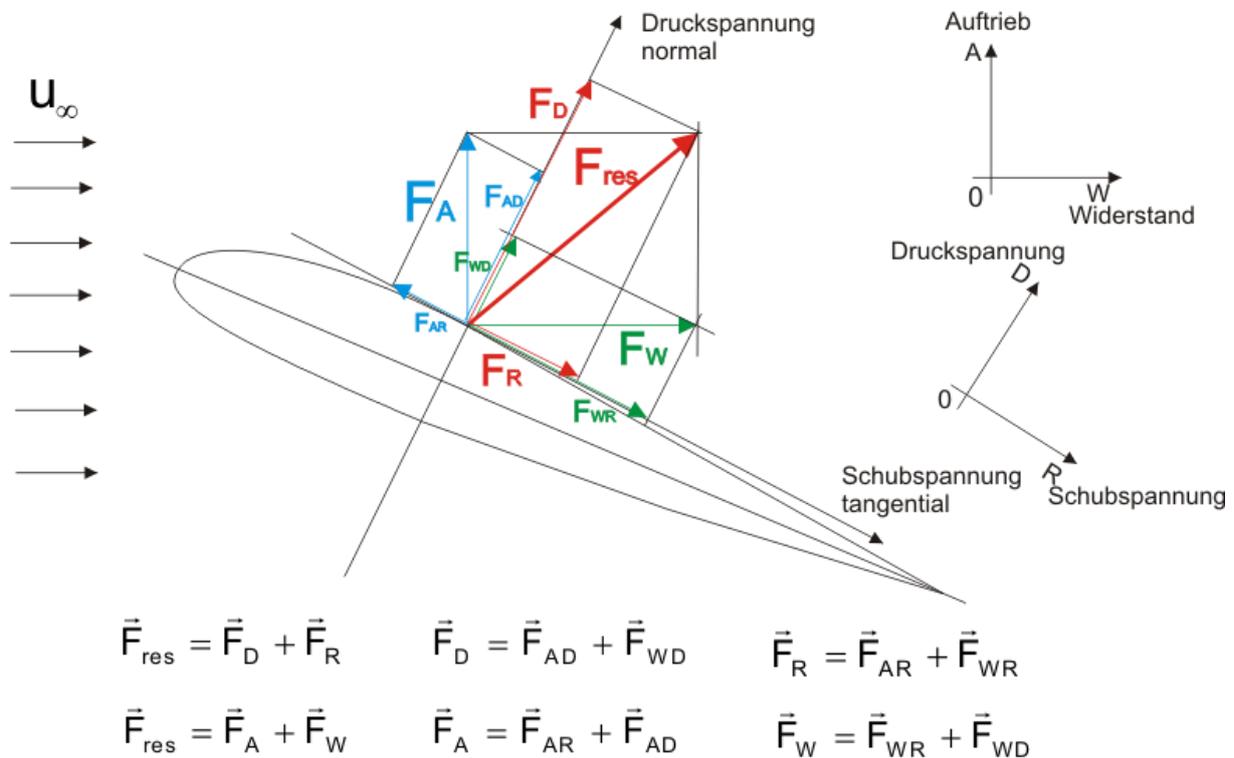


Abb. 10-14: Kombination der Koordinatensysteme AOW und DOR

Betrachten wir jetzt einen umströmten Körper und seine Oberfläche: An der Grenzfläche des umströmten Körpers wirken in jedem Punkt eine Schubspannung τ tangential zur Grenzfläche und Druck p normal zur Grenzfläche (siehe Abb. 10-15). Daher setzt sich der

Strömungswiderstand F_W wiederum aus einer Kraft der Schubspannungen (Reibungswiderstand F_R) und der Druckspannungen (Druckwiderstand F_D) zusammen.

Der Reibungswiderstand wird durch die Integration der Schubspannungen und der Druckwiderstand durch die Integration der Druckspannungen über die Oberfläche berechnet.

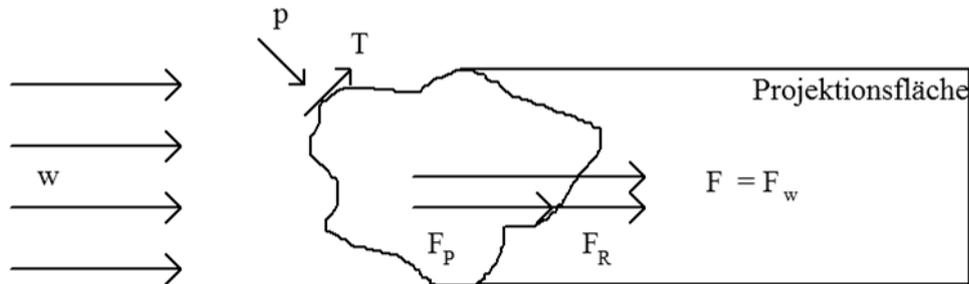
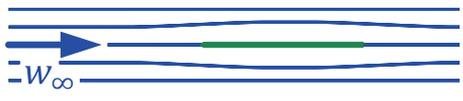
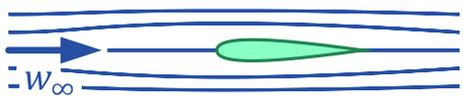
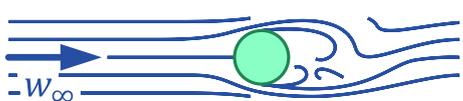


Abb. 10-15: Strömungswiderstand, zusammengesetzt aus Reibungs- und Druckwiderstand

Bei plumpen Körpern gilt $F_D \gg F_R$, bei schlanken Körpern $F_R \gg F_D$.

Die folgende Tab. 10-1 gibt die ungefähre Aufteilung des Widerstandes in Druck- und Reibungswiderstand für einige Fälle in Prozent an:

Tab. 10-1: Aufteilung des Widerstands eines umströmten Körpers

Körper	Druckwiderstand	Reibungswiderstand
	[%]	[%]
Tragfläche	10	90
PKW	90	10
Flugzeug	50	50
	0	100
	≈ 10	≈ 90
	≈ 90	≈ 10
	100	0

Der Reibungswiderstand ist eine Funktion der Viskosität. Im Idealfall reibungsloser Strömung tritt kein Reibungswiderstand auf. Aber auch der Druckwiderstand verschwindet. Man bezeichnet diese Tatsache als d'Alambertsches Paradoxon.

Die theoretische Bestimmung des Körperwiderstandes ist nicht möglich. Der Körperwiderstand findet daher Eingang in die Berechnungen über die c -Beiwerte (c_W , c_D , c_A), die jeweils in Laborversuchen empirisch bestimmt werden. Es gilt:

$$(c_W, c_D, c_A) = f(\text{Geometrie, Rauigkeit, } Re, Ma) \quad \text{Gl. 10-15}$$

mit der Mach-Zahl Ma .

Eine Tabellierung erfolgt in Abhängigkeit des Anstellwinkels α . Für Standardgeometrien findet man die c -Werte in umfassenden Tabellenwerken. Für individuelle Objekte müssen spezielle Versuchsreihen durchgeführt werden. Dies ist zum Beispiel bei jedem neuen Automodell der Fall und ein hoher Werbefaktor.

Der Widerstandsbeiwert c_W ist definiert durch:

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot A_S} \quad \text{Gl. 10-16}$$

Er ist eine dimensionslose Größe. Als Bezugsfläche A_S dient hier die Grundrissfläche (Schattenfläche):

$$A_S = b \cdot L \quad \text{Gl. 10-17}$$

Der Druckbeiwert c_p ist definiert durch:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2} \quad \text{Gl. 10-18}$$

Der Auftriebsbeiwert c_A ist definiert durch:

$$c_A = \frac{F_A}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot A_S} \quad \text{Gl. 10-19}$$

mit F_A als der wirkenden Auftriebskraft.

Bei einer Anströmung erfährt jedes Objekt eine Widerstandskraft.

Objekte erfahren eine Auftriebskraft nur, wenn Anströmung asymmetrisch bezüglich der Achse in Anströmungsrichtung ist.

10.4.2 Grundlagen der praktischen Tragflügeltheorie

Das Koordinatensystem wird wie folgt definiert (siehe Abb. 10-16):

- z-Achse: Parallel zur Schwerkraft

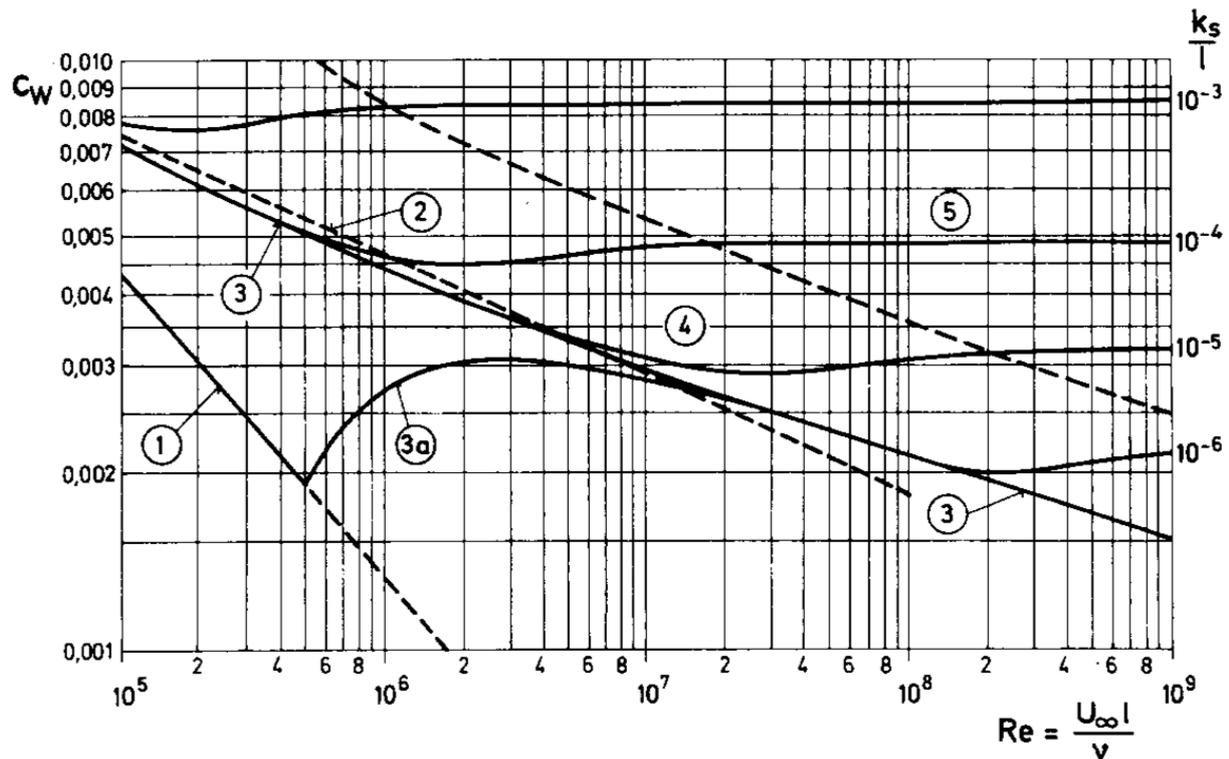


Abb. 10-20: Widerstand der längsangeströmten ebenen Platte

Für die c_W -Werte der längsangeströmten Platte gelten die folgenden Formeln:

Bereich (1) – Blasius (siehe Abb. 10-20):

Laminar, hydraulisch glatt, $Re < 5 \cdot 10^5$

$$c_W = \frac{1,32824}{\sqrt{Re}} \quad \text{Gl. 10-21}$$

Bereich (2) – Prandtl:

Turbulent, hydraulisch glatt, $5 \cdot 10^5 < Re < 10^6$, $L \gg x_U$

$$c_W = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} \quad \text{Gl. 10-22}$$

Bereich (3a) – Prandtl:

Turbulent, hydraulisch glatt, $5 \cdot 10^5 < Re < 10^6$, $L > x_U$

$$c_W = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} - \frac{1700}{Re} \quad \text{Gl. 10-23}$$

Bereich (3) – Prandtl-Schlichting:

Turbulent, hydraulisch glatt, $10^6 < Re < 10^9$, $L \gg x_U$

$$c_W = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \quad \text{Gl. 10-24}$$

Bereich (4):Turbulent, hydraulisch glatt, $10^6 < Re < 10^9$, $L > x_U$

$$c_W = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{1700}{Re} \quad \text{und} \quad \frac{U_\infty \cdot k_S}{\nu} \leq 100 \quad \text{Gl. 10-25}$$

Bereich (5):Turbulent mit Rauigkeit, $10^6 < Re < 10^9$, $10^3 < L/k_S < 10^9$

$$c_W = \left(1,89 + 1,62 \cdot \log \frac{L}{k_S}\right)^{-2,5} \quad \text{und} \quad \frac{U_\infty \cdot k_S}{\nu} > 100 \quad \text{Gl. 10-26}$$

Der Begriff „hydraulisch glatt“ bedeutet, dass die Rauigkeit keine Rolle spielt. Für Rauigkeitshöhen k_S , bei denen die Rauigkeit noch keinen Einfluss auf den Widerstand hat, gilt die einfache Formel:

$$\frac{U_\infty \cdot k_S}{\nu} \leq 100 \quad \rightarrow \quad \text{hydraulisch glatt} \quad \text{Gl. 10-27}$$

Überschreitet k_S diese zulässige Grenze, dann sind zwei Bereiche zu unterscheiden:

$$\frac{U_\infty \cdot k_S}{\nu} > 100 \quad \rightarrow \quad \text{Rauigkeit muss berücksichtigt werden} \quad \text{Gl. 10-28}$$

Im Bereich (4) (Nummerierung bezieht sich auf die eingekreisten Bereichsnummern in Abb. 10-20) ist der Widerstandsbeiwert von der relativen Rauigkeitshöhe k_S/L und der Reynolds-Zahl Re abhängig. Im Bereich (5) nur noch von k_S/L .

10.6 Ablösung

Wenn ein Körper von einem Fluid angeströmt wird, bildet sich an seiner Vorderseite ein Staupunkt aus (siehe Abb. 10-21).

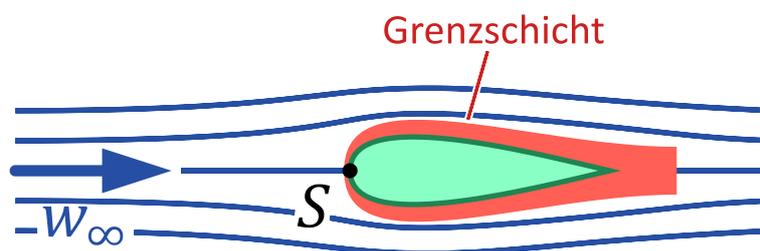


Abb. 10-21: Staupunkt am umströmten Profil

In diesem Punkt ist die gesamte kinetische Energie der Anströmung vollständig in Druck umgesetzt worden.

Wir verfolgen nun den Weg eines Fluidteilchens auf einer Stromlinie nahe der Körperoberfläche (siehe Abb. 10-22).

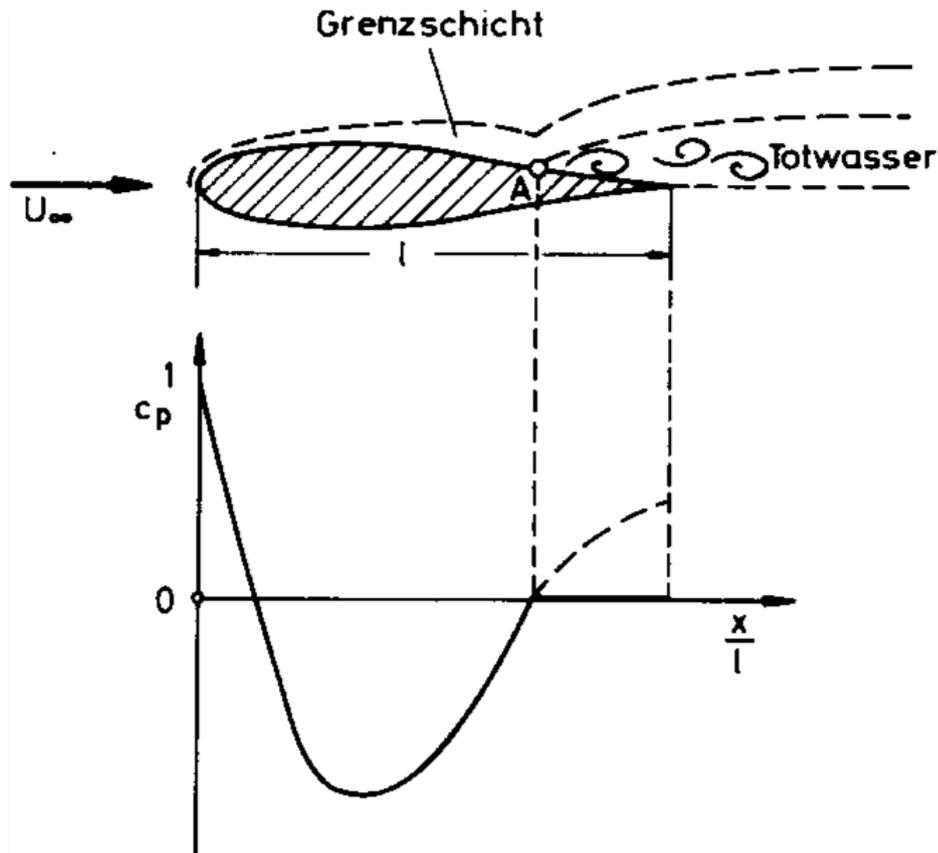


Abb. 10-22: Druckverteilung am Profil bei Ablösung der Grenzschicht mit dem Druckbeiwert c_p (siehe Gl. 10-18)

- Das Fluidteilchen bewegt sich vom Staupunkt aus in ein Gebiet abnehmenden Druckes.
- Dabei wird es beschleunigt.
- In dieser Beschleunigungsphase nimmt seine kinetische Energie zu.
- Hinter der dicksten Stelle des Körpers steigt der Druck aber wieder an.
- Das Teilchen wird infolgedessen verzögert.
- Außerdem wirkt auf das Teilchen eine verzögernde Reibungskraft.
- Ein Teil der Energie wird dissipiert.

Als Folge davon reicht die gewonnene kinetische Energie nicht aus, um das Teilchen gegen den Druckanstieg bis zum hinteren Ende des Körpers strömen zu lassen. Das Teilchen fängt unter dem Einfluss des weiteren Druckanstieges an, in Gegenrichtung zu strömen. Es bildet sich ein Rückströmungsgebiet, das die Außenströmung von der Oberfläche abdrängt, was zur Ablösung der Strömung von der Wand führt. Die Verhinderung der Ablösung ist durch Absaugen der Grenzschicht möglich, wodurch diese eine konstante Dicke δ erhält.

10.7 Umströmung einer Kugel

Die Kugel ist im Vergleich zu einem schlanken Körper ein stumpfer Körper. Daher ist mit Strömungsablösung zu rechnen (siehe Abb. 10-23). Der überwiegende Teil des Kugelwiderstandes ist der Druckwiderstand. Dieser ergibt sich aus:

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2} \quad \text{Gl. 10-29}$$

In Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl Re mit

$$Re = \frac{U_\infty \cdot D}{\nu} \quad \text{Gl. 10-30}$$

gilt außerdem:

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $c_W = \frac{24}{Re}$ | $10^{-4} < Re < 2$ (Stokes) | schleichende Strömung |
| 2. $c_W = \frac{18,5}{Re^{0,6}}$ | $2 < Re < 0,5 \cdot 10^3$ | Übergangsbereich nach Allen |
| 3. $c_W = 0,4$ | $0,5 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$ | unterkritisch nach Newton |
| 4. $c_W = 0,08$ | $2 \cdot 10^5 < Re < 10^7$ | überkritisch |
| 5. $c_W = 0,2$ | $Re > 10^7$ | transkritisch |

Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Umströmung erfolgt bei der kritischen Reynolds-Zahl $Re_{kr} = 3 \cdot 10^5$.

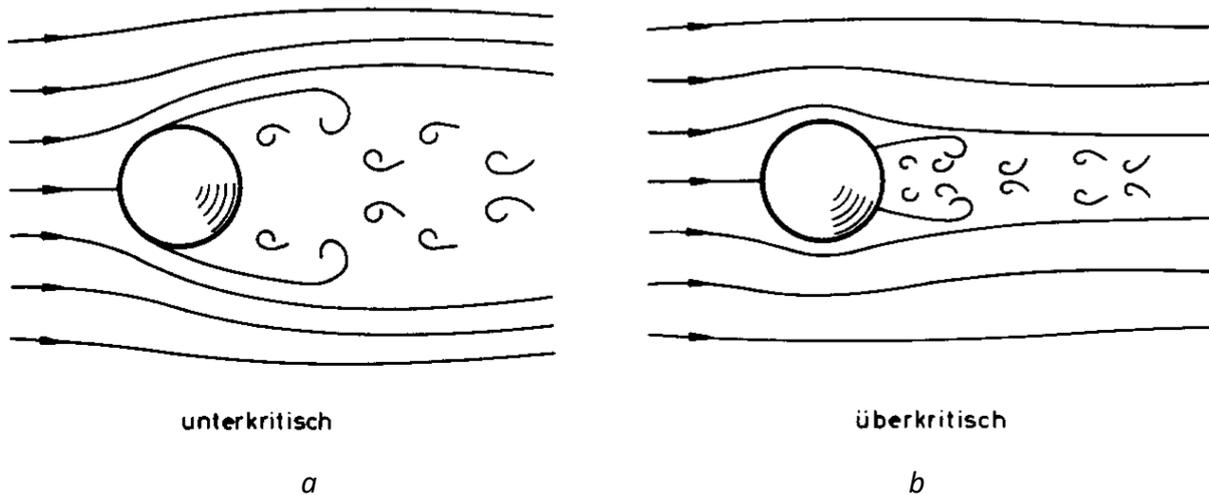


Abb. 10-23: Totwassergebiet hinter der Kugel (von Karmansche Wirbelstraße), a) bei unterkritischer Strömung, b) bei überkritischer Strömung

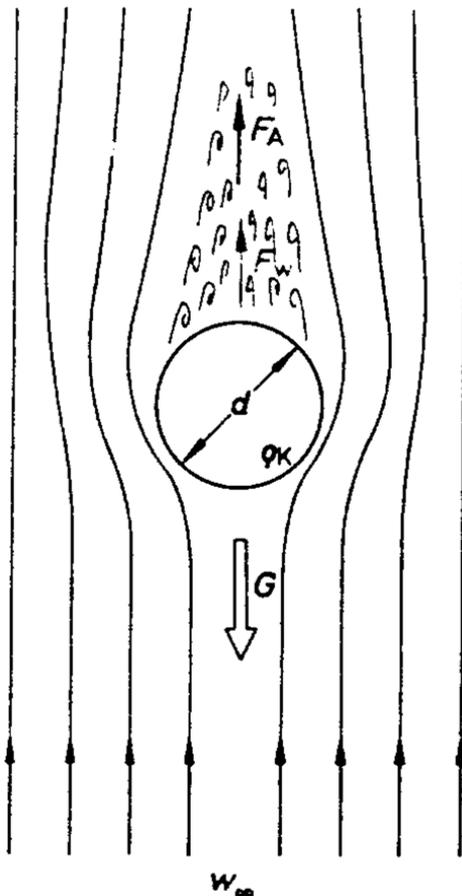
Beispiel: Freier Fall mit Strömungswiderstand

Abb. 10-24: Körper im freien Fall

Beim freien Fall in einem Fluid wirken folgende Kräfte auf den Körper:

Die Gewichtskraft G

$$G = F_G = m \cdot g \quad \text{Gl. 10-31}$$

wirkt nach unten, der Strömungswiderstand F_W

$$F_W = \frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot c_W \cdot A \quad \text{Gl. 10-32}$$

nach oben – der Anströmgeschwindigkeit entgegengesetzt. Die Auftriebskraft F_A (statischer Auftrieb)

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V \quad \text{Gl. 10-33}$$

ist ebenfalls nach oben gerichtet (ρ – Dichte der Luft, V – Volumen der Kugel).

Das Kräftegleichgewicht lautet somit:

$$F_G = F_W + F_A \quad \text{Gl. 10-34}$$

$$m \cdot g = \frac{\rho}{2} \cdot w_{\infty}^2 \cdot c_W \cdot A + \rho \cdot g \cdot V \quad \text{Gl. 10-35}$$

Daraus ergibt sich für die stationäre Endgeschwindigkeit w_{∞} :

$$w_{\infty} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{m - \rho \cdot V}{c_W \cdot \rho \cdot A}} = \sqrt{2 \cdot \frac{g}{c_W \cdot A} \cdot \left(\frac{m}{\rho} - V \right)} \quad \text{Gl. 10-36}$$

Wenn der statische Auftrieb vernachlässigt werden kann ($\rho \ll \rho_K$ bzw. $\rho \cdot V \ll m$), so vereinfacht sich das Ergebnis zu:

$$w_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot m}{c_W \cdot \rho \cdot A}} \quad \text{Gl. 10-37}$$

Rechenbeispiel:

Gegeben ist eine Kugel, mit dem Durchmesser D und der Dichte ρ_K , die in einer Flüssigkeit der Dichte ρ nach unten sinkt. Nach einer gewissen Zeit bewegt sie sich mit der stationären Sinkgeschwindigkeit w_{∞} . Wie groß ist die Geschwindigkeit w_{∞} ?

Die Masse der Kugel m ist

$$m = \rho_K \cdot g \cdot V \quad \text{Gl. 10-38}$$

Einsetzen in Gl. 10-36 ergibt für die Sinkgeschwindigkeit

$$w_{\infty} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{V \cdot (\rho_K - \rho)}{c_W \cdot \rho \cdot A}} \quad \text{Gl. 10-39}$$

für deren Berechnung jedoch der korrekte c_W -Wert benötigt wird. Dieser selbst hängt jedoch von der Reynolds-Zahl und diese wiederum von der Fallgeschwindigkeit ab. Somit lässt sich w_{∞} nur durch einen iterativen Prozess bestimmen.

Man geht von einem Schätzwert für den c_W -Wert aus, berechnet damit w_{∞} und die dazugehörige Reynolds-Zahl und prüft anhand des Diagramms (siehe Abb. 10-25), ob Reynolds-Zahl und c_W -Wert zueinander passen bzw. die Abweichung in einem tolerierbaren Bereich liegt.

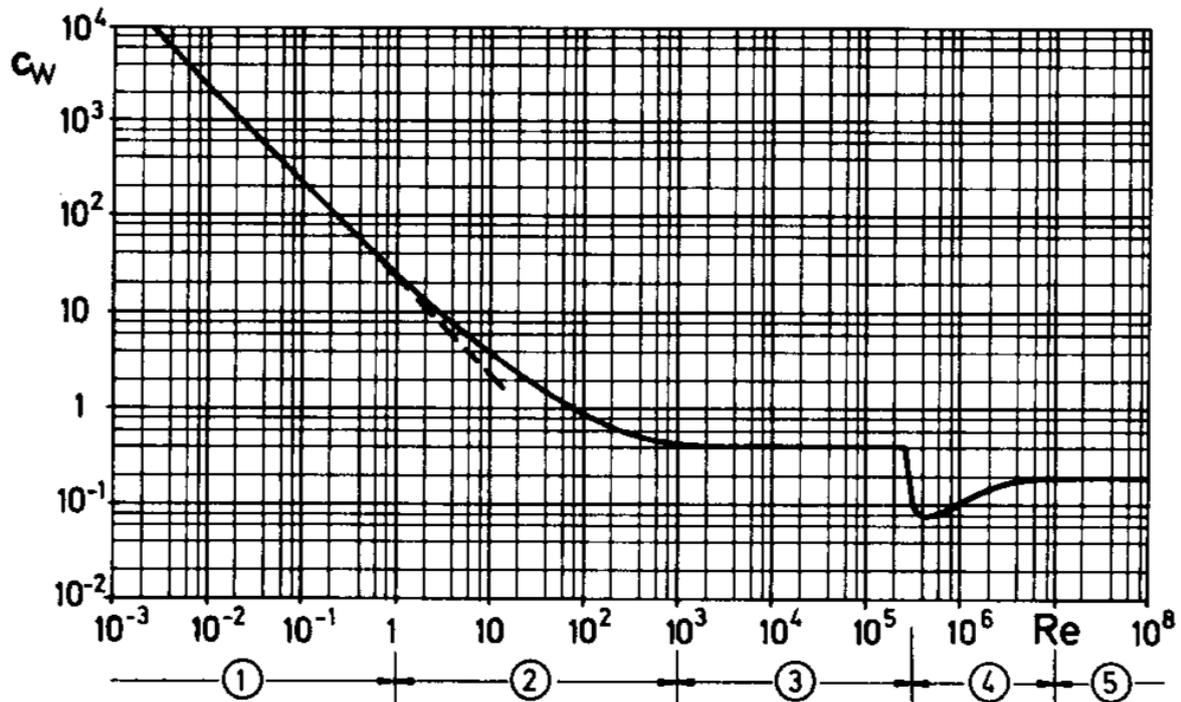


Abb. 10-25: Verlauf des Widerstandsbeiwertes c_W der Kugel

10.7.1 Schleichende Strömung um eine Kugel in einer reibungsbehafteten Flüssigkeit – Widerstandskraft

Ziel: Herleitung des c_W -Wertes

Die Kugel ist im Vergleich zu einem schlanken Profil ein stumpfer Körper. Daher ist mit Strömungsablösung zu rechnen. Im Folgenden werden wir uns mit dem Umströmungswiderstand beschäftigen.

Körperumströmungen bei kleinen Reynolds-Zahlen $Re < 1$ werden in der Technik als schleichende Strömungen bezeichnet. Sie treten auf, wenn z. B. die Zuströmgeschwindigkeit U_∞ klein oder die Viskosität ν des strömenden Mediums groß ist. In diesem Kapitel soll die schleichende, inkompressible Strömung um eine Kugel mit dem Durchmesser D betrachtet werden.

Der Umströmungswiderstand F_W eines Körpers setzt sich zusammen aus

- Druckwiderstand $F_{W,D}$
- Reibungswiderstand $F_{W,R}$

Gegebene Größen: U_∞ , p_∞ , Radius R , $\nu = \eta/\rho$, **gesuchte Größen:** $F_{W,R}$, $F_{W,D}$, F , c_W

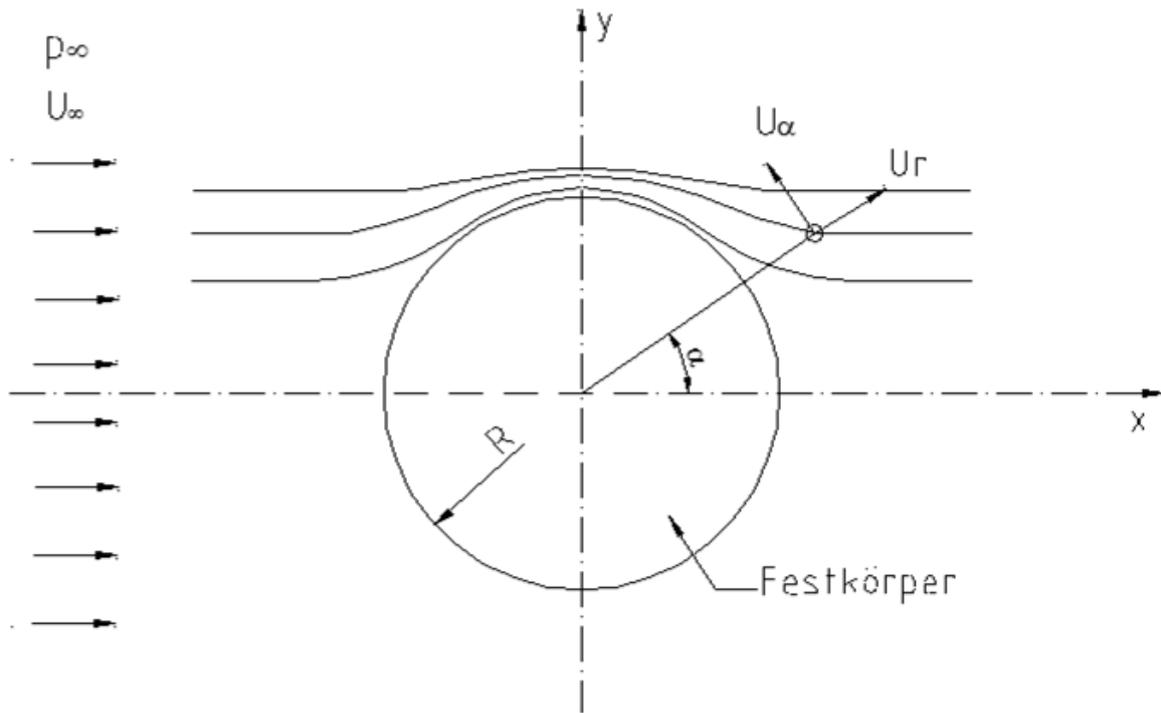


Abb. 10-26: Umströmung einer Kugel

10.7.1.1 Druckwiderstand

p_K Normalspannung (Konturdruck)

τ Tangentialspannung (Schubspannung)

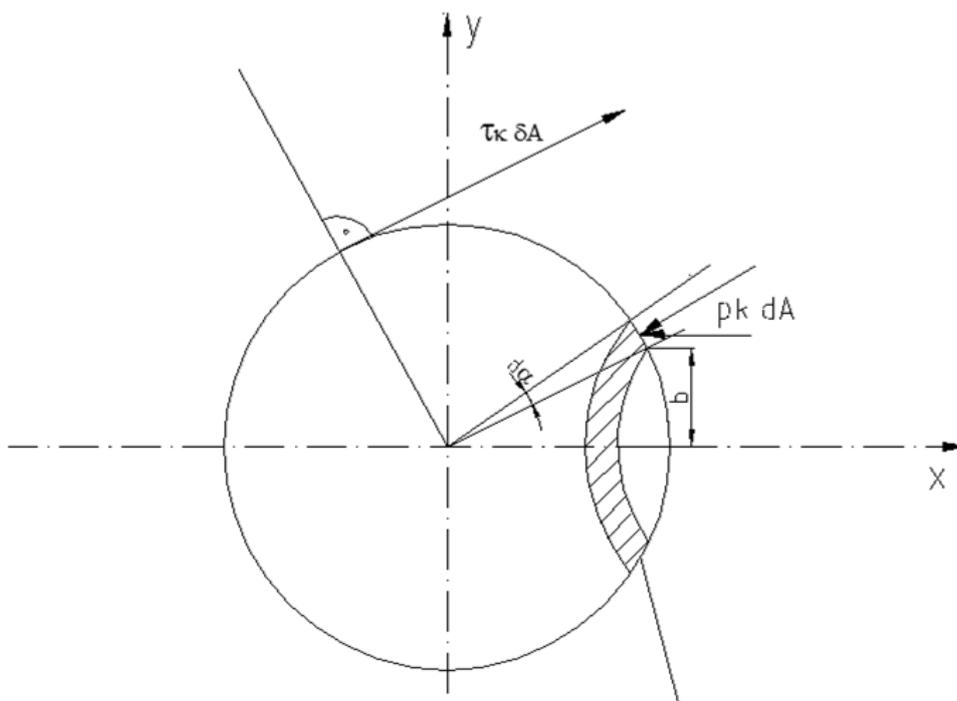


Abb. 10-27: Druckwiderstand bei der Umströmung einer Kugel

$$\begin{aligned} dA &= (2 \cdot \pi \cdot b) \cdot R \cdot d\alpha & (b &= R \cdot \sin \alpha) \\ dA &= 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \end{aligned} \quad \text{Gl. 10-40}$$

Der Druckwiderstand resultiert aus der Integration der in Anströmrichtung wirkenden Komponenten der Normalspannung (horizontale, d. h. x -Komponenten in diesem Beispiel)

$$\begin{aligned} dF_{W,D} &= p_K \cdot dA_X = p_K \cdot \cos \alpha \cdot dA \\ F_{W,D} &= \int_A dF_{W,D} = - \int_A p_K \cdot \cos \alpha \cdot dA \end{aligned} \quad \text{Gl. 10-41}$$

Der Druck p_K ist auf der Fläche dA konstant. Das Minuszeichen vor dem Integral berücksichtigt, dass die Kräfte $F_{W,D}$ für $0 < \alpha < 90^\circ$ in negative x -Richtung und für $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ in positive x -Richtung wirken.

$$F_{W,D} = - \int_A p_K \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{Gl. 10-42}$$

Der Konturdruck p_K ergibt sich aus einer analytischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung zu

$$p_K = - \frac{3 \cdot \eta \cdot U_\infty}{2 \cdot R} \cdot \cos \alpha + p_\infty \quad \text{Gl. 10-43}$$

Eingesetzt in Gl. 10-42 erhält man:

$$F_{W,D} = \int_0^\pi 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \cdot \cos \alpha - p_\infty \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{Gl. 10-44}$$

Mit der Lösung des Integrals

$$I = 2\pi R^2 \cdot \left(\int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha - \int_0^\pi p_\infty \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \right) \quad \text{Gl. 10-45}$$

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{Gl. 10-46}$$

$$I_1 = \int_0^\pi p_\infty \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$$

Substitution:

$$\cos \alpha = z \quad \Rightarrow \quad -\sin \alpha \, d\alpha = dz \quad \text{Gl. 10-47}$$

$$I_1 = \int -\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \cdot z^2 \, dz = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \cdot \left(\frac{1}{3} z^3 \right) \quad \text{Gl. 10-48}$$

$$I_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \cdot \left(\frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right) \quad \text{Gl. 10-49}$$

$$I_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1 - 1) = \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} \quad \text{Gl. 10-50}$$

Für Integral 2 erhalten wir

$$I_2 = p_\infty \cdot \int z \, dz = p_\infty \cdot \frac{1}{2} \cdot z^2 \quad \text{Gl. 10-51}$$

$$I_2 = -p_\infty \cdot \left(\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right) \quad \text{Gl. 10-52}$$

$$I_2 = -p_\infty \cdot (1 - 1) = 0 \quad \text{Gl. 10-53}$$

Damit erhalten wir für $F_{W,D}$:

$$F_{W,D} = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\eta \cdot U_\infty}{R} = 2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot U_\infty \quad \text{Gl. 10-54}$$

10.7.1.2 Reibungswiderstand

Der Reibungswiderstand $F_{W,R}$ ergibt sich aus der Integration der horizontalen x -Komponente der Tangentialspannungen $dF_{W,R} = |\tau| \cdot dA$, die vom Fluid auf die Kontur übertragen werden, also:

$$F_{W,R} = \int_{F_{Rx}} dF_{W,R} = \int_A |\tau| \cdot \sin \alpha \, dA \quad \text{Gl. 10-55}$$

Die vom Fluid auf die Kugel übertragene Schubspannung τ ergibt sich ebenfalls aus einer analytischen Lösung der N-S-Gleichung zu:

$$\tau = -\eta \frac{3 U_\infty \sin \alpha}{2 R} \quad \text{Gl. 10-56}$$

Damit kann der Reibungswiderstand durch Integration bestimmt werden.

$$F_{W,R} = \int_0^\pi \eta \frac{3 U_\infty \sin \alpha}{2 R} \cdot \sin \alpha \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin \alpha \, d\alpha \quad \text{Gl. 10-57}$$

$$F_{W,R} = \int_0^\pi 3\pi \eta U_\infty R \sin^3 \alpha \, d\alpha \quad \text{Gl. 10-58}$$

$$F_{W,R} = \int_0^\pi 4\pi \eta U_\infty R \, d\alpha \quad \text{Gl. 10-59}$$

Damit beträgt die gesamte Widerstandskraft $F_W = F_{W,D} + F_{W,R}$:

$$\begin{aligned} F_W &= F_{W,D} + F_{W,R} \\ &= 6\pi \eta U_\infty R \end{aligned} \quad \text{Gl. 10-60}$$

Mit dem Ausdruck für die Widerstandskraft

$$F_W = c_W \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \pi R^2 \quad \text{Gl. 10-61}$$

lässt sich der dimensionslose c_w -Wert für diesen Fall berechnen:

$$c_W = \frac{2F_W}{\rho U_\infty^2 \pi R^2} = \frac{2(6\pi\eta U_\infty R)}{\rho U_\infty^2 \pi R^2} = \frac{12\eta}{\rho U_\infty R} = \frac{24\eta}{\rho E_\infty D} \quad \text{Gl. 10-62}$$

Mit

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{\rho U_\infty D}{\eta} \quad \text{Gl. 10-63}$$

erhält man schließlich

$$c_W = \frac{24}{Re} \quad \text{Gl. 10-64}$$

10.7.2 Kugelumströmung in einer reibungslosen Flüssigkeit

Geschwindigkeitspotential φ der Strömung

Lösung der Laplace-Gleichung mit den dazugehörigen Randbedingungen – der Satz allein sagt gar nichts aus.

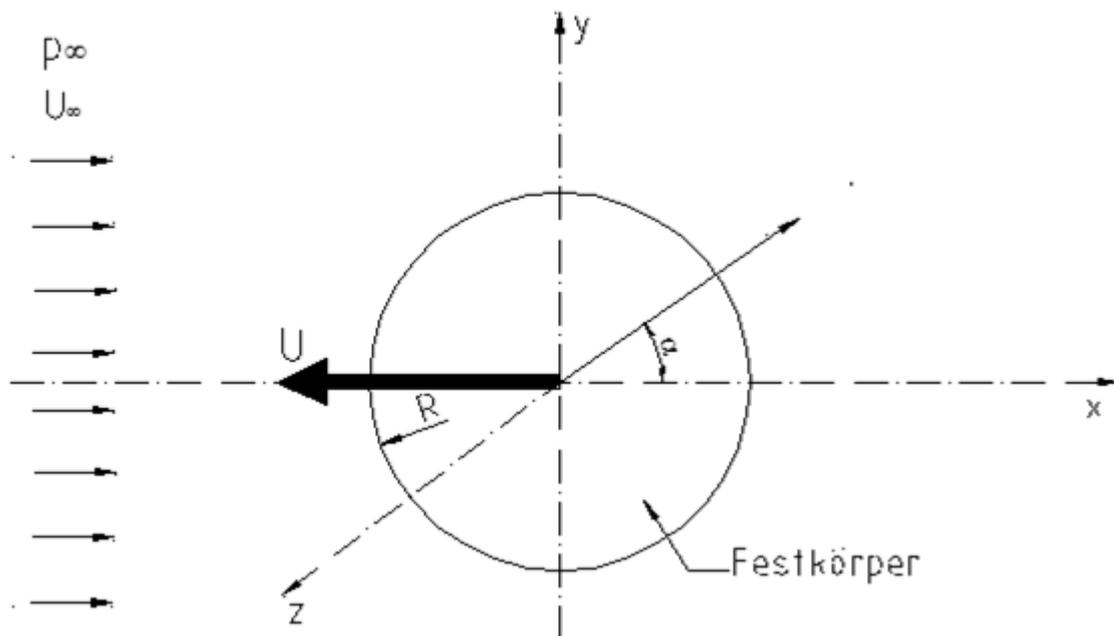


Abb. 10-28: Kugelumströmung

Das Problem ist rotationssymmetrisch zur x -Achse und wird in den Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \alpha \\ y &= r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ z &= r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad \text{Gl. 10-65}$$

formuliert, da sich der Rand dann als Fläche $r = \text{konst.}$ besonders einfach beschreiben lässt. Um das gesuchte Geschwindigkeitspotential φ zu finden, muss die Laplace-Gleichung gelöst werden.