Lesevorlesung ☺

zum Selbstlesen der Vorlesung mithilfe des Vorlesungsskriptes „Vorlesung Bremen STRO 2020.pdf“

Technische Strömungslehre

Dr.-Ing. Uwe Borchert

Fluidenergiemaschinen und Energieanlagen

Berechnung – Auslegung – Beratung

www.fe-bab.de/stro

Mrz bis Juni 2020

Inhalt

Vorwort

Liebe Studierende,

es handelt sich bei diesem Dokument um den Versuch, Ihnen eine Selbstvorlesung zur Verfügung zu stellen. Dabei soll es darum gehen, die Zusammenhänge des Fachs besser zu verstehen, um zumindest teilweise die Präsenz einer Person, die die Vorlesung hält, zu ersetzen.

Die erforderlichen Zusammenhänge erschließen sich nicht so leicht und ohne die Diskussion mit Ihnen, wenn Sie nur das Vorlesungsskript „Vorlesung Bremen STRO 2020.pdf" durchlesen.

Dieses Werk soll Ihnen mit Tafelbildern das im Vorlesungsskript gezeigte erläutern, kommentieren, erklären. Lesen Sie bitte dieses Skript und stellen Sie sich vor, dass ich Ihnen das alles erzählen würde und dabei hier und da mit den Händen zeigen würde und die Tafelbilder an die Tafel schreiben würde.

Falls Fragen auftreten sollten, bitte stellen Sie diese – am besten per E-Mail an uwe.borchert@lba.hs-bremen.de.

Viel Erfolg und Spaß beim Durcharbeiten.

1 Einführung in die Technische Strömungslehre

Inhalt:

- **Einführungsvorlesung (Video)**
- **Stoffeigenschaften (Video)**
- **Hydrostatik (Lesevorlesung)**
- **Übungsaufgaben H-1, H-2**

Bitte schauen Sie sich zuerst die Einführungsvorlesung auf https://youtu.be/tjlvKLL6Q2w an.

Wenn Sie jetzt hoffentlich einen kleinen Einblick in die Strömungslehre erhalten haben, nehmen Sie sich bitte noch etwas Zeit für das kurze Kapitel Stoffeigenschaften, dass Sie im Kurzvideo https://youtu.be/h7Pdco1_wFI anschauen und als kurzes Kapitel
1 – Eigenschaften von Fluiden durchlesen können.

Nachdem Sie dies geschafft haben und Sie jetzt grundsätzliche Begriffe kennengelernt haben, möchten ich Sie nun durch die Vorlesung *Technische Strömungslehre* führen.

1.1 Was sind Fluide

Wir fassen noch einmal zusammen und gehen dann weiter: Fluide sind

- Tropfbare Flüssigkeiten
- Gase
- Dämpfe

1.2 Eigenschaften der Fluide

Wie kann man Fluide unterscheiden und charakterisieren? Fluide werden bestimmt durch:

- Masse mit dem Symbol m und der Dimension und Einheit kg
- Volumen $V\ [m^3]$ und spezifisches Volumen $v \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right]$
- Dichte (Kehrwert des spezifischen Volumens) $\varrho \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$
- Gasgesetz (vielleicht schon bekannt aus der Thermodynamik: $p \cdot v = R_s \cdot T$ mit dem Druck $p\ [\mathrm{Pa}]$, der spezifischen Gaskonstante $R_s \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}\right]$ und der Temperatur $T\ [\mathrm{K}]$

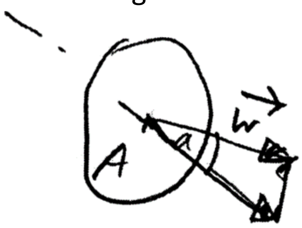
- Kompressibilität:

	Inkompressibel	kompressibel
Vorsilbe:	Hydro…	Aero…
Beispiele:	• Wasser • Öl • Luft bei Geschwindigkeiten $< 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	• Atmosphäre bei Geschwindigkeiten $< 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ • Dampf in Dampfkraftanlagen
	• Wasserturbinen • Ventilatoren, Windturbinen (da geringere Geschwindigkeiten)	• Gasturbinen, Turboverdichter • Dampfturbinen

Im Allgemeinen gilt: Die Stoffgrößen sind abhängig von der Fluidtemperatur und dessen Druck → $X(p,T)$.

1.3 Massenstrom und Volumenstrom – Kontinuitätsgleichung

Der Massenstrom ist die zeitlich durch eine Querschnittsfläche strömende Fluidmenge. Der Strömungsquerschnitt sei A, die Dichte ϱ, der Fluidmassenstrom ist $\dot{m}$ (ein m mit einem Punkt darüber = Ableitung nach der Zeit).



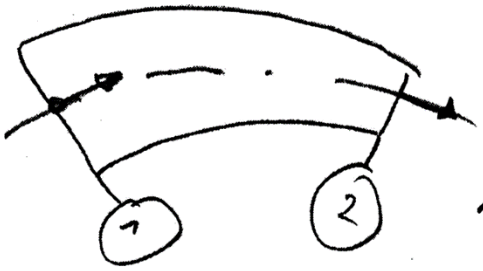
$$\dot{m} \sim A$$
$$\dot{m} \sim \rho$$
$$\dot{m} \sim w \cdot \cos\alpha \cdot \rho \cdot A$$

Das heißt, der Massenstrom steigt bei sonst unverändertem Zustand proportional mit dem durchströmten Querschnitt und proportional zur Dichte des Fluids.

$$\dot{m} = \rho \cdot \underbrace{w \cdot A}_{=\dot{V}}$$
$$\dot{V} = w \cdot A$$
$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$$

Dabei ist zu beachten, dass man bei schräg durchströmten Querschnitten dies durch das Herausziehen der Komponenten berücksichtigen muss, sodass der Massenstrom dann ganz allgemein proportional zur Geschwindigkeitskomponente steigt oder sinkt.

Der Volumenstrom ist das Produkt aus Geschwindigkeit und Strömungsquerschnitt.



$1 \rightarrow 2$

oder $i \rightarrow j$ oder Hirsch → Zebra

$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ muss! wo soll es hin?

Wenn man eine Stromröhre betrachtet, wie hier im Tafelbild oberhalb, kann man sich vorstellen, dass die Masse, die an dem einen Ende hineingegeben wird, auf der anderen Seite wieder herauskommen muss. Das heißt, der Massenstrom $\dot{m}$ muss konstant bleiben. Wo soll die Masse sonst hin?

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\downarrow$$

$$\rho_1 \cdot \dot{V}_1 = \rho_2 \cdot \dot{V}_2$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\rho_1 \cdot w_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot A_2} \quad \text{Konti}$$

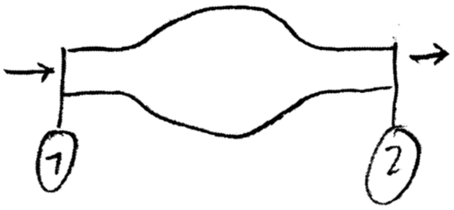
wenn $\rho_1 = \rho_2$ ← Wasser z.B. → $\dot{V}_1 = \dot{V}_2$

$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2$ → falls $A_1 = A_2$

Wenn man diesen Gedanken weiterentwickelt, und den Strömungsquerschnitt, die Strömungsgeschwindigkeit w und die Dichte einsetzt, so erhält man die allgemeingültige **Kontinuitätsgleichung (Konti-Gleichung)**, die in dem Tafelbild hier oberhalb eingerahmt ist.

> Die allgemeine Kontinuitätsgleichung mit Massenstrom gilt unabhängig vom Fluid und der Form der Stromröhre.

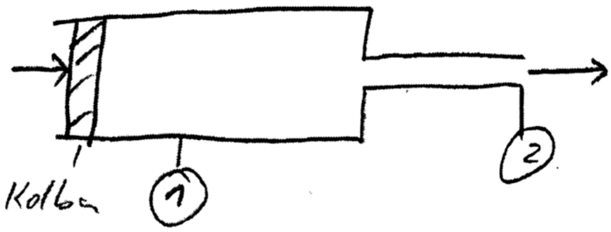
Wenn das Fluid jedoch inkompressibel ist, das heißt, wenn sich die Dichte nicht ändert (z. B. Wasser), dann gilt sogar die vereinfachte Kontinuitätsgleichung. Bitte schauen Sie aufs Tafelbild oberhalb. Wenn die Dichte konstant ist, muss dies auch für den Volumenstrom $\dot{V}$ gelten.



$\Rightarrow w_1 = w_2$

Im Tafelbildes hier oben sehen Sie noch einen Fakt: Egal, wie sich auch immer die die Größe oder die Form des durchströmten Querschnitts verändert, wenn die betrachteten Strömungsquerschnitte, hier A_1 und A_2 gleich sind, sind auch die Geschwindigkeiten gleich.

Jetzt weiter… Stellen Sie sich eine medizinische Spritze vor (siehe Tafelbild hier unter): Da wird ein Kolben im größeren Zylinder von links nach rechts bewegt. Dabei muss der Kolben das Fluid im Zylinder weiterschieben/verdrängen.



Spritze mit Flüssigkeit $\rightarrow \varrho_1 = \varrho_2$

Wo soll das Fluid hin? Genauso viel Fluid, wie vom Kolben verdrängt wird, fließt auch durch den kleineren Zylinder (die Kanüle). Wir gehen dabei davon aus, wie vereinbart, dass wir in diesem Teil der Strömungslehre erst einmal nur mit **inkompressiblen Fluiden** arbeiten. Das heißt, die Dichte an der Stelle (1) ist gleich der Dichte an der Stelle (2).

Aus der Kontinuitätsgleichung und der konstanten Dichte ϱ können wir hier gleich die vereinfachte Variante mit konstantem Volumenstrom anwenden:

Konti $\qquad \dot{V}_1 = \dot{V}_2$

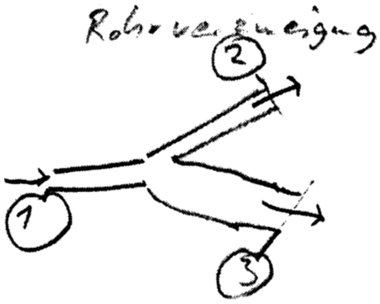
$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

Differenz/Erhöhung $\qquad w_2 - w_1 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2 - A_1}$

Hier möchte ich noch einmal verdeutlichen, dass die Produkte aus Dichte ϱ, Strömungsgeschwindigkeit w und durchströmter Fläche A stets gleich sind.

Ein ganz anderer Fall ist die **Rohrverzweigung**. Bitte werfen Sie einen Blick auf das folgende Tafelbild!



$\Rightarrow$ Konti $\quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$

mit ρ = konst.

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

Aufteilung zunächst nicht bekannt!

So, wie das hier aufgezeichnet ist, wird sofort klar, dass hier die Summe der beiden Massenströme (2) und (3) gleich dem bei (1) eintretenden sein muss. Dabei ist aber nicht sofort klar, wie die Aufteilung ist. Das ist ein anderes Thema. Wir merken uns hier, dass bei einer Rohrverzeigung die Summen stimmen müssen.

1.4 Druck

Was ist der Druck? Der Druck ist der Quotient aus Kraft und Fläche. Das heißt, der Druck ist umso höher, je höher die auf eine bestimmte Fläche wirkende Kraft ist.

$$p = \frac{F}{A} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right] [Pa] \qquad \begin{array}{l} F - \text{Kraft (z.B. Kolben)} \\ A - \text{Fläche} \end{array}$$

Die Einheit des Drucks ist das Pascal $[\mathrm{Pa}]$, was der Einheitenkombination Newton pro Quadratmeter entspricht. Sehr häufig haben wir es in den Berechnungen mit $[\mathrm{bar}]$ zu tun. Hier unterhalb sind noch ein paar Einheiten, die uns in der Technik immer wieder begegnen, abgebildet.

Einheiten

$$1\ N/m^2 = 1\ Pa$$

$$10^5\ Pa = 1\ bar = 1000\ mbar$$

$$10{,}2\ m\ H_2O = 100\ 062\ Pa$$

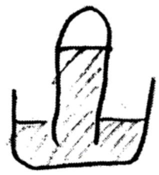
$$760\ Tor = 760\ mm\ Hg = 101\ 098\ Pa$$

Zu den Einheiten $[\mathrm{mmWS}]$ (Millimeter Wassersäule) und Tor kommen wir noch, wenn wir die Hydrostatik durcharbeiten.

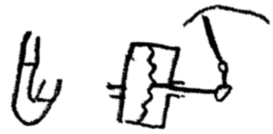
Nun ist Druck aber nicht gleich Druck. Wir werden ab jetzt gleich mehrere Druckbegriffe unterscheiden. Bitte schauen Sie auf das folgende Tafelbild.

Druckbegriffe

- Absolutdruck p_{abs}



- Differenzdruck Δp
  Überdruck
  Unterdruck
  gemessen mit dem Manometer



- Umgebungsdruck p_0
  p_u
  p_∞
  gemessen mit dem Barometer

Absolutdruck = Umgebungsdruck + Druckdifferenz
= Umgebungsdruck + Überdruck
= Umgebungsdruck − Unterdruck

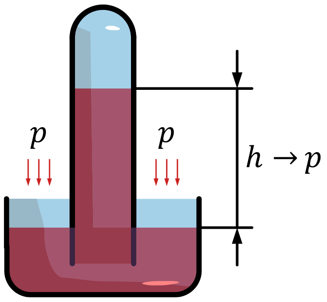
Es wäre auch hilfreich, wenn Sie die Herleitungen und Grafiken im Vorlesungsskript nachschlagen würden.

Wir unterscheiden grundsätzlich nach Absolutdruck und Differenzdruck:

Der **Absolutdruck** ist der Druckwert im Vergleich zum Vakuum. In unserer Atmosphäre spüren wir keinen Druck (sonst ist es etwas anderes, vielleicht etwas medizinisches). Trotzdem wir keinen Druck spüren, ist er da. Wir wissen das natürlich heute. Die Menschen wussten das jedoch nicht immer. Denken Sie an den spektakulären Versuch des Otto von Guericke mit den Halbkugeln, der auch Bürgermeister des damaligen Magdeburgs war, als er 1657 den latent herrschenden Luftdruck der Umgebungsluft demonstrierte.

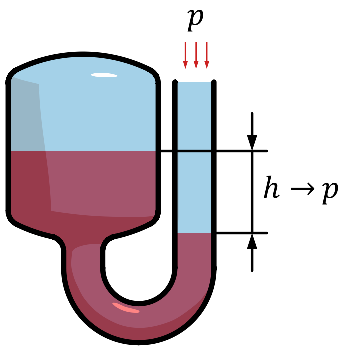
> Der **Absolutdruck** ist der Druckwert im Vergleich zum Vakuum wird mit einem **Barometer** gemessen. Der Wert des Absolutdrucks ist stets **positiv** (theoretisch ≥ 0).

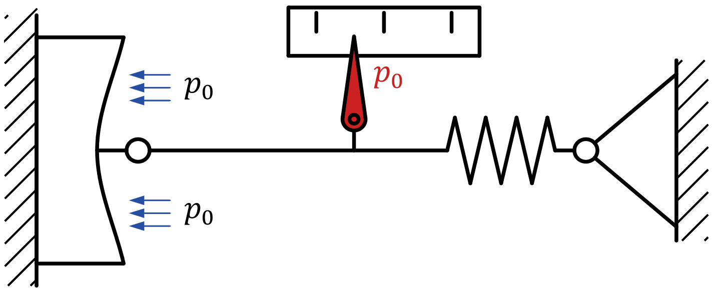
Zwei Flüssigkeitsbarometer finden Sie auf der nächsten Seite…



Das nebenstehende Flüssigkeitsbarometer ist eins vom Typ Quecksilberthermometer. Das erste hat **Evangelista Torricelli** im Jahre 1643 erfunden. Das obere Ende ist dicht verschlossen und in der Horizontallage nicht mit Luft oder einem anderen Gas gefüllt. In der abgebildeten Lage sinkt die Flüssigkeit durch ihr Eigengewicht in den Vorratsbehälter. Damit dieser Effekt überhaupt auftritt, verwendet man normalerweise Quecksilber für dieses Barometer, da Quecksilber eine sehr hohe Dichte besitzt. Mit Wasser müsste das Barometer mindestens 10 m hoch sein. Mit Quecksilber ist dieses Barometer nur etwa einen Meter hoch. Darüber werden wir uns noch im nächsten Kapitel unterhalten, wenn es um Hydrostatik geht.

Das rechts dargestellte Barometer zeigt das Prinzip des Goethe-Barometers. Hier ist im Behälter kein Vakuum, sondern es ist Luft eingeschlossen. Man kann dieses Barometer sozusagen rekalibrieren, indem man durch vorsichtiges Kippen, kombiniert mit Öffnen und Zuhalten der Öffnung mittels Finger, mehr oder weniger Luft in den Behälter bringt.





Man kann Barometer auch auf mechanische Art aufbauen, indem eine Federkraft den Druckkräften entgegenwirkt. In der nebenstehenden Abbildung sehen Sie ein Barometer mit einer Membrandose. Das Prinzip ist in den Barometern verwendet worden, auf das Opi immer mit dem Finger geklopft hat, um zu schauen, ob ein Tief im Anmarsch ist.

Der andere Druck ist der **Differenzdruck**. Anderslautende Begriffe, die aber das gleiche meinen sind Druckdifferenz, Relativdruck, Unterdruck und Überdruck. Anders als der Absolutdruck, ist der Differenzdruck eine Differenz, ein Unterschied, und kann positive und negative Werte annehmen. Demzufolge ist der Differenzdruck ein Vergleichsdruck, benötigt also einen weiteren Druck, einen Referenzdruck, auf den sich der Differenzdruck bezieht.

Man nimmt zum Beispiel den Umgebungsdruck. Bitte schauen Sie noch einmal auf das Tafelbild auf Seite 1-6! Wenn man jetzt zum Beispiel sagt, dass da im Reifen 2,2 bar hineinmüssen, dann herrschen danach absolut ca. 3,2 bar im Reifen, denn (siehe Tafelbild):

$$Absolutdruck = Umgebungsdruck + Differenzdruck$$

Für die Belastung des Reifens ist der Absolutdruck allerdings nicht entscheidend, sondern der Differenzdruck. Für thermodynamische Prozesse, aber auch hier im Rahmen der

Vorlesung *Technische Strömungslehre*, speziell beim Thema Bernoulli-Gleichung, ist es erforderlich, mit Absolutdrücken zu denken und zu rechnen. Wenn Sie dann auf Differenzdrücke stoßen, müssen Sie dies bedenken!

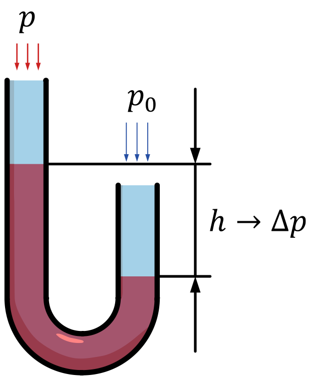
Es heißt also:

$$Absolutdruck = Referenzdruck + Differenzdruck$$

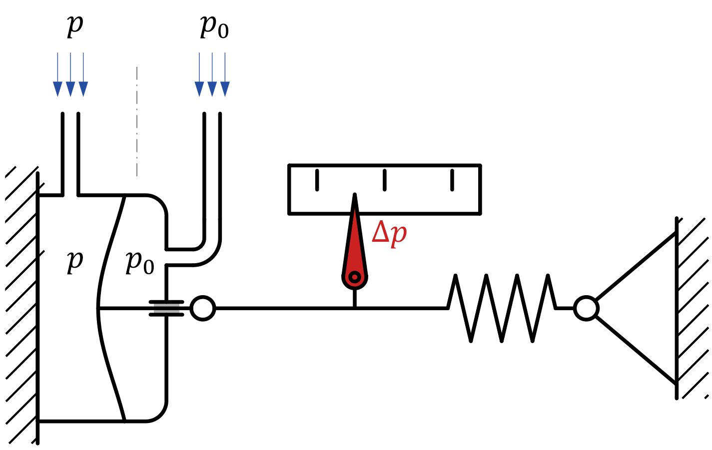
Es heißt **niemals** Referenzdruck minus Differenzdruck, dann geht es schief. Vorsicht bei **Unterdruck** und **Überdruck**. Der Unterdruck ist schon ein „umgefriemelter" negativer Differenzdruck und der Überdruck ein positiver. Leider lässt die DIN zu, dass es auch noch negativen Unterdruck, also eine positive Druckdifferenz, und dass es negativen Überdruck, also eine negative Druckdifferenz gibt.

Der **Differenzdruck** ist der Druckwert im Vergleich zum **Referenzdruck** wird mit einem **Manometer** gemessen. Der Wert des Differenzdrucks kann **negativ**, **null** oder **positiv** sein.

Zwei Arten von Manometern – das ist die Bezeichnung für die Geräte zur Messung von Differenzdrücken – sind in den folgenden beiden Abbildungen zu sehen. Hier rechts sehen wir ein U-Rohr-Manometer, ein Flüssigkeitsmanometer. Im folgenden Kapitel 2 werden wir die Funktionsweise noch näher erläutern. Man sieht aber sofort, dass zwei verschiedene Drücke auf die beiden Enden einwirken und die Flüssigkeitssäule in einer bestimmten Weise verschieben.



In der Abbildung unter diesem Absatz ist das Prinzip einer mechanischen Variante abgebildet. Das Funktionsprinzip mit Dose und Membran ähnelt dem des Barometers auf der letzten Seite. Bei diesem mechanischen Manometer ist allerdings „die andere Seite" mit dem Referenzdruck beaufschlagt.

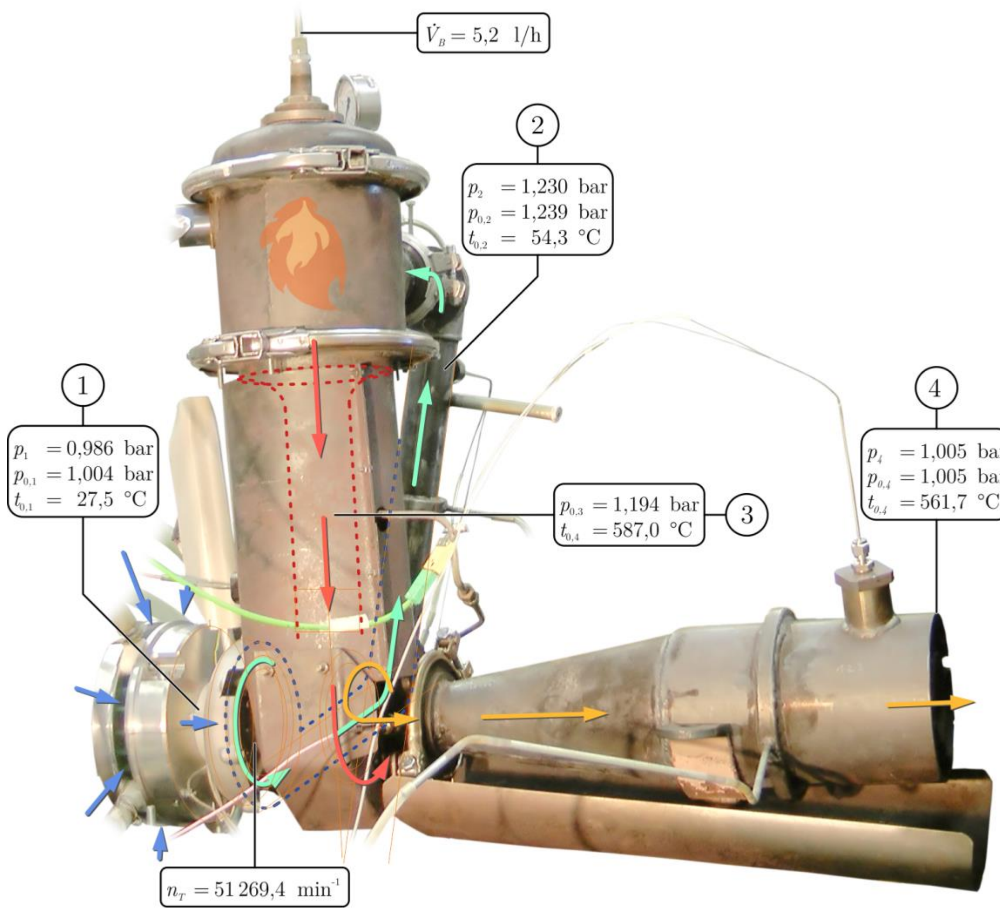


Manometer heißen also die Messgeräte, mit denen auch Reifendrücke gemessen werden, aber nicht nur da. Auch in der Wissenschaft werden Differenzdrücke gemessen. Schauen Sie sich die Abbildung auf der nächsten Seite an. Dort sehen Sie an der kleinen

Versuchsgasturbine einige Drücke in bar angegeben. Für die Beschreibung des in der Gasturbine ablaufenden Prozesses sind die Absolutdrücke entscheidend.

Welcher der beiden Druckbegriffe ist in der Abbildung dargestellt? Sind es Differenzdrücke oder Absolutdrücke?

Richtig, das sind alles Absolutdrücke. An der Stelle (1) sehen Sie die Ergebnisse am Eintritt des Verdichters. Der Wert für p_1 bezeichnet den statischen Druck (Achtung! Noch ein Druckbegriff, aber dazu später, wenn wir die Bernoulli-Gleichung behandeln, oder schauen Sie noch einmal in die Einführungsvorlesung.) kurz vor dem Verdichterlaufrad. Der ist etwas niedriger als der übliche Umgebungsdruck von 1,01325 bar. Der andere Druckwert $p_{0,1}$ bezeichnet den Gesamtdruck. Der ist ein klein wenig höher als der Umgebungsdruck. Das ist am Eintritt des Verdichters, der ja direkt mit der Umgebungsluft in Verbindung steht, auch nicht anders zu erwarten.



Vielleicht wäre es an dieser Stelle gut zu wissen, was die normalen Werte für die Umgebung sind:

Normalbedingungen auf Meeresspiegelniveau
15 °C , 1013,25 hPa

Also ungefähr 1 bar ist der Umgebungsdruck in der Atmosphäre.

2 Hydrostatik

Wir befassen uns hier zunächst mit Fluiden, die inkompressibel und homogen sind, Fluide, die ruhen und die unter dem Einfluss einer Schwerebeschleunigung stehen:

Hydrostatik

Fluid

ruht

inkompressibel

homogen

unter Einfluss von g

2.1 Grundgleichung der Hydrostatik

Betrachten Sie bitte einmal das folgende Tafelbild:

Kräftegleichgewicht

$$\sum F_{i,z} = m \cdot \ddot{z}$$

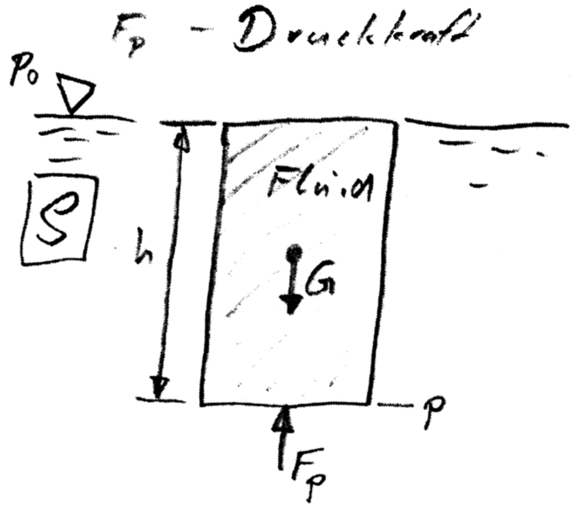
$$F_p - m \cdot g - p_0 \cdot A = 0$$

$$p = \frac{F_p}{A} \qquad p \cdot A - m \cdot g - p_0 \cdot A = 0$$

Masse des Fluids

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h$$

Wir kennen A nicht!



Rechts im Bild sehen Sie, sagen wir, einen See von der Seite. Wir sehen gleichzeitig alles, was über und was unter Wasser ist. Das Objekt, dass da durch ein Rechteck eingerahmt ist, ist kein massiver Körper. Das ist das gleiche Wasser des Sees.

Wir denken uns einfach, dass wir uns diesen abgegrenzten Teil des Wassers separat vornehmen könnten. Dieser Wasserkörper hat also eine Höhe h und oben und unten die Flächen A. Wir kennen aber die Größe von A nicht. Die Fläche A ist also erst einmal beliebig groß.

Das Produkt der Höhe h und der Fläche A ergibt bekanntlich das Volumen V dieses gedachten Wasserkörpers. Im Schwerpunkt greift die Gewichtskraft G an, die das Produkt aus der Masse m und der Schwerebeschleunigung g ist. Die Masse wiederum ist das Produkt aus dem Volumen und der Dichte ϱ ist (siehe Tafelbild). Damit ist die Masse auch das Produkt aus Dichte, Grundfläche und Höhe – logisch.

Jetzt müssen wir erst einmal die wirkenden Kräfte analysieren, ohne sie im Einzelnen kennen zu müssen. Da gibt es einerseits die schon erwähnte Gewichtskraft G, die nach unten zeigt. Der Umgebungsdruck p_0 wirkt auf die gesamte Wasseroberfläche und somit auch auf die unbekannte Fläche A nach unten. Das Produkt aus einem Druck und einer Fläche ist eine Kraft (siehe Abschnitt 1.4 auf Seite 1-5). Hier nennen wir sie Druckkraft.

Von den Seiten und von unten wirken ebenfalls Kräfte. Die von den Seiten heben sich gegenseitig auf. Die Kraft, die von unten auf die Fläche wirkt, sollten wir näher anschauen: Welcher Druck unter Wasser in welcher Tiefe wirkt, wissen wir noch nicht. Wir wissen, dass sich Druck allseitig (kugelförmig) ausbreitet und dass Druck normal auf Flächen wirkt, also senkrecht auf die jeweilige Fläche. Die Kraft, die von unten nach oben auf die Fläche unseres gedachten Wasserkörpers wirkt, soll hier Druckkraft F_p heißen.

Um weiter zu kommen, sollten wir ein Kräftegleichgewicht aufstellen, also die Summe aller (gerichteten) Kräfte soll null sein:

$$+F_p - G - p_0 \cdot A = 0$$

Dabei ist zu beachten, dass die Elemente F_p, G und $p_0 \cdot A$ dieser Summe mit den richtigen Vorzeichen versehen werden. Nur die Druckkraft F_p, die von unten nach oben wirkt, erhält das positive Vorzeichen. Die Gewichtskraft G wirkt nach unten, ebenso der Umgebungsdruck.

Wir multiplizieren die Kräftegleichgewichtsgleichung aus und erhalten

$$\text{mit } F_p = p \cdot A$$

$$\text{und mit } G = m \cdot g = \varrho \cdot V \cdot g = \varrho \cdot g \cdot A \cdot h$$

$$p \cdot A - \varrho \cdot g \cdot A \cdot h - p_0 \cdot A = 0$$

Hier werden wir sofort die Fläche A los und erhalten

$$p - \varrho \cdot g \cdot h - p_0 = 0$$

Und dieser von unten wirkende Druck p ist, der, nachdem wir suchen. Wir erhalten mit

$p = p_0 + \varrho \cdot g \cdot h$	→	**Grundgleichung der Hydrostatik**

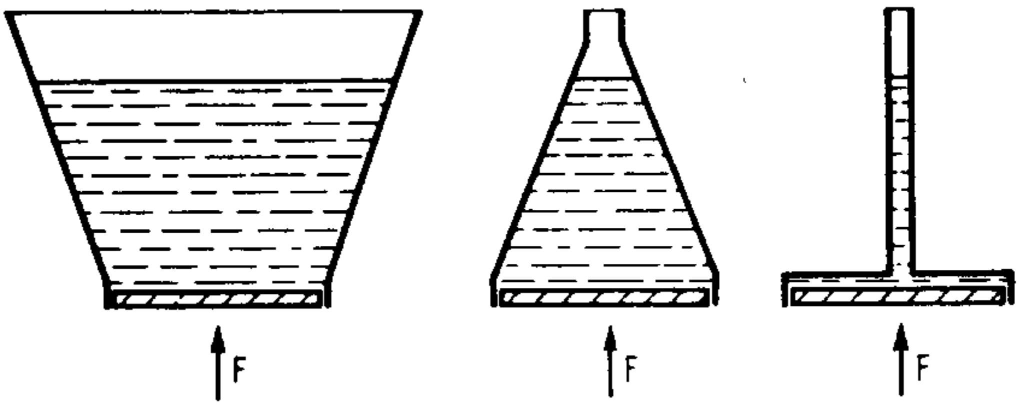
Diese wichtige Grundgleichung merken Sie sich bitte! Sie ist auch in der ab Kapitel 4 ab Seite 4-1 behandelten **Bernoulli-Gleichung** als einer der Terme enthalten.

Der **hydrostatische Druck** p ist ein Skalar und wirkt normal auf die Oberfläche eines Körpers. In der gleichen Tiefe unter der Wasseroberfläche herrscht überall der gleiche hydrostatische Druck. Weiterhin gilt, dass der **hydrostatische Druck** mit zunehmender Tiefe zunimmt.

Ab jetzt brauchen wir diesen gedachten Volumenausschnitt von Seite 2-1 nicht mehr. Da die Fläche A eliminiert werden konnte, bleibt zur Beschreibung die Höhe h, die in unserem Beispiel die Wassertiefe darstellt.

2.2 Pascalsches Paradoxon

Jetzt betrachten wir einmal die folgende Abbildung. Dort sehen wir drei Gefäße mit unterschiedlichen Formen. Jedoch sind sowohl die Dichten der Flüssigkeiten gleich als auch die Flüssigkeitsspiegel in allen Gefäßen gleich hoch.



Es ist offensichtlich, dass die drei Gefäße inklusive ihrer Flüssigkeiten unterschiedliche Massen aufweisen müssen – ganz links am höchsten, in der Mitte eine mittlere Masse und rechts ganz gering.

Die skizzierten Kolben sollen die gleiche Fläche haben. Hier treten so gut wie immer Fragen auf, aber hier sind alle Kräfte F gleich groß!

Gut, Sie räumen ein aus der hergeleiteten **Grundgleichung der Hydrostatik**, dass der Druck an den Kolben wohl gleich sein müsse, da von oben der gleiche Umgebungsdruck, wie hoch er auch immer sein mag, herrscht und die Flüssigkeitssäulen alle gleich hoch sind, aber, aber…

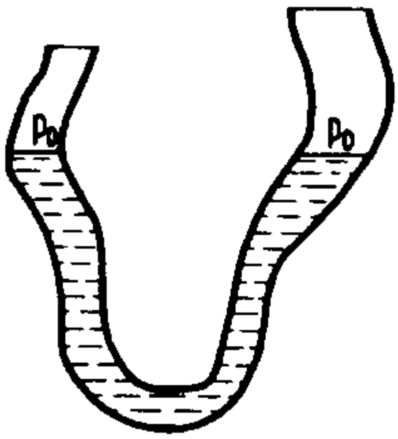
Was ist mit den Gewichtskräften aus den unterschiedlich hohen Massen?

Die Antwort darauf ist: Die Gewichtskräfte werden von den Gefäßen selbst gehalten. Die Kraft, die der Kolben halten muss ist genau

$$F = p \cdot A$$

Den Rest übernimmt die Gefäßwand.

2.3 Kommunizierende Röhren



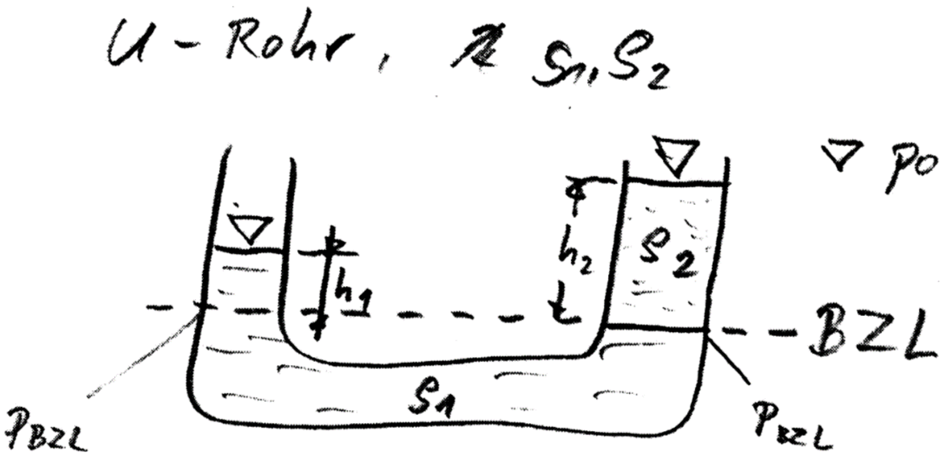
Das Prinzip der Hydrostatik führt uns zu den kommunizierenden Röhren. Bitte schauen Sie auf die nebenstehende Abbildung: Eine irgendwie (beliebig) geformte Röhre, zum Beispiel ein Schlauch, enthalte eine Flüssigkeit. Die Enden seien offen. Das heißt, in beiden Enden herrscht der gleiche Druck über den Flüssigkeitsspiegeln.

Wie auch immer wir die Röhre verbiegen… Stehen die Flüssigkeitsteile der Enden miteinander in Berührung, dann kommunizieren sie sozusagen, indem sich der Druck in einer bestehenden Tiefe auch über Hindernisse hinweg auszudehnen scheint.

Physikalisch betrachtet passiert Folgendes: Der hydrostatische Druck (Summe aus dem Druck auf dem Flüssigkeitsspiegel und dem Druck aufgrund der Flüssigkeitssäule) steigt mit sinkender Tiefe. Das heißt, dass der Druck an der Stelle, wo sich die Enden der Röhre berühren, gleich sein muss, da dort die gleiche Tiefe ist. Die Erklärung zäumt die Angelegenheit sozusagen von hinten auf.

Daraus kann man wunderbar eine „Langstreckenwasserwaage“ bauen.

Eine häufig angewandte kommunizierende Röhre ist das U-Rohr. Ein Blick auf das folgende Tafelbild verrät, dass in dem U-Rohr zwei verschiedenen Flüssigkeiten ruhen. Außerdem sehen wir noch den Terminus **„BZL“**. Doch dazu kommen wir gleich.



Das, was jetzt kommt, ist eine Erklärung für die Lösung vieler der zur Verfügung stehenden Übungsaufgaben, von denen Sie vielleicht schon einige zu lösen versuchten und irgendwann nicht mehr weiterkamen.

Sie erinnern sich doch noch an das Prinzip des Freischneidens aus der *Technischen Mechanik* oder? So etwas müssen wir hier auch machen. Bitte betrachten Sie das U-Rohr. Wir sehen, dass sich die Flüssigkeit mit der Dichte ϱ_1 sowohl im linken als auch rechten Teil des U-Rohrs befindet, jedoch mit unterschiedlicher Höhe der Flüssigkeitsspiegel. Auf der linken Seite sehen wir, dass der Umgebungsdruck p_0 über das offene Ende auf den Flüssigkeitsspiegel wirkt.

Auf der rechten Seite herrscht der gleiche Umgebungsdruck über dem Flüssigkeitsspiegel der anderen Flüssigkeit mit der Dichte ϱ_2. Dann folgt die Flüssigkeitssäule mit ϱ_2, die als Schicht auf der ersten Flüssigkeit aufliegt.

Jetzt führen wir einen Begriff ein: In dem dargestellten Fall herrscht, wie wir bereits wissen, in der Höhe, in der der Flüssigkeitsspiegel mit der Dichte ϱ_1 rechts endet, in beiden Schenkeln (mit derselben Flüssigkeit) des U-Rohrs der gleiche Druck. Da befindet sich eine gestrichelte Linie. Die markiert unsere untere **Bezugslinie**, hier abgekürzt als **BZL**.

„Freischneiden" an der Bezugslinie

$\Downarrow$

2 Gleichungen

Links

$$p_L = p_0 + \varrho_1 \cdot g \cdot h_1$$

Rechts

$$p_R = p_0 + \varrho_2 \cdot g \cdot h_2$$

Achtung! $p_L = p_R$

$$\cancel{p_0} + \varrho_1 \cdot \cancel{g} \cdot h_1 = \cancel{p_0} + \varrho_2 \cdot \cancel{g} \cdot h_2$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

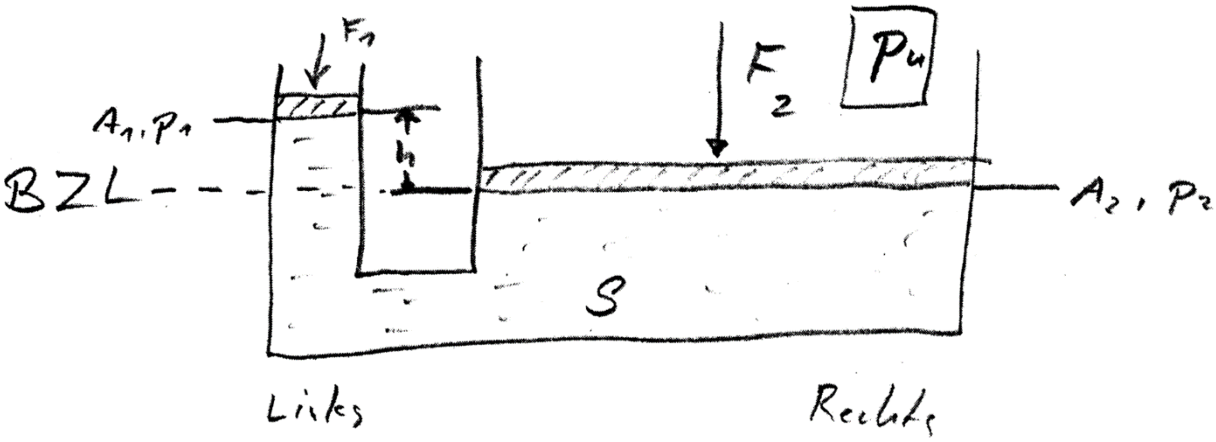
Das Tafelbild hier oben zeigt die weitere Vorgehensweise. Wir wissen schon, dass der Druck an der Bezugslinie gleich ist. Damit stehen die beiden verschieden hohen Flüssigkeitspegel in einem festen Zusammenhang.

Das Tafelbild zeigt die hydrostatischen Gleichungen für beide Seiten – links und rechts. Auf der linken Seite wirkt oberhalb der Bezugslinie nur die Flüssigkeit mit ϱ_1 mit der Höher h_1. Auf der rechten Seite wirkt nur die Flüssigkeitssäule mit der Dichte ϱ_2. Und natürlich wirkt auf beide Flüssigkeitssäulen der gleiche Umgebungsdruck p_0.

Nach ein wenig Kürzen und Umstellen erhalten wir die Verhältnisse der Dichten und Flüssigkeitshöhen. Das bedeutet, wir können den Zustand rechnerisch abbilden, obwohl wir hier nicht wissen, wie hoch der Druck unterhalb der Bezugslinie ist.

2.4 Hydraulik – Übersetzung durch Hydraulik

Ein weiteres Beispiel ist die Hydraulik. Das folgende Tafelbild zeigt ein System aus zwei verbundenen (kommunizierenden) Röhren, die mit einer Flüssigkeit mit der Dichte ϱ gefüllt sind.



Auf den Flüssigkeitsspiegeln liegen Kolben mit den Flächen A_1 und A_2 auf, deren Masse hier vernachlässigt werden soll. Auf die Kolben wirken noch die Kräfte F_1 und F_2 und der Umgebungsdruck p_U. Nicht wundern bitte! Der **Umgebungsdruck** heißt hier p_U. Manchmal wird auch p_∞ verwendet.

Wie im vorigen Abschnitt 2.3 teilen wir das System in links und rechts, setzen unsere **Bezugslinie** auf Höhe der Unterkante des am tiefsten liegenden Kolbens, hier der rechte, und wir erhalten das unten stehende Tafelbild.

Links

$$p_L = p_u + \frac{F_1}{A_1} + \varrho \cdot g \cdot h$$

Rechts

$$p_R = p_u + \frac{F_2}{A_2}$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} - \varrho \cdot g \cdot h$$

In hydraulischen Anlagen (Presse, Hydraulikmotor)

$\varrho \cdot g \cdot h \ll \frac{F}{A}$ → vernachlässigen $\Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

$$F_2 \gg F_1$$

wenn $A_2 \gg A_1$

Auf der linken Seite addieren wir also den Umgebungsdruck, die Druckkraft aus F_1 mit

$$p = \frac{F_1}{A_1}$$

und die Flüssigkeitssäule mit $\varrho \cdot g \cdot h$.

Auf der rechten Seite herrschen nur die Druckkraft $p_U \cdot A_2$ und die Kraft F_2. Dies, geteilt durch die Fläche A_2, ergibt den Druck auf der rechten Seite. Also erhalten wir für die Drücke auf Höhe der Bezugslinie

Links	Rechts
$p_L = p_U + \frac{F_1}{A_1} + \varrho \cdot g \cdot h$	$p_R = p_U + \frac{F_2}{A_2}$

Die beiden Drücke p_L und p_R liegen beide auf der Bezugslinie und sind daher gleich. Nach wenigen Schritten erhalten wir

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} - \varrho \cdot g \cdot h$$

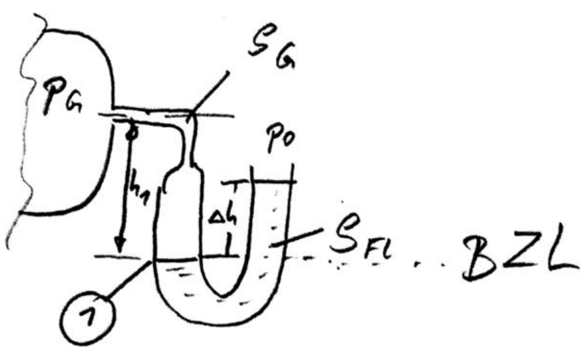
In realen hydraulischen Anlagen sind die Drücke jedoch um Größenordnungen höher als das bisschen von der Höhe der Flüssigkeitssäulen, sodass Sie in der Auslegung von hydraulischen Anlagen von wenigen Metern Höhe und Drücken von 200…1000 bar die Höhe der Flüssigkeitssäulen vernachlässigen können.

Die vereinfachte Gleichung für solche hydraulischen Anlagen lautet dann

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Die Kenner unter uns sehen sofort, dass das eine Art Übersetzungsgetriebe beschreibt – kleiner Kolbendurchmesser, großer Hub (Bewegungsstrecke des Kolbens), kleine Kraft auf der einen Seite und großer Kolbendurchmesser, kleiner Hub und große Kraft auf der anderen Seite.

2.5 U-Rohr-Manometer zur Messung des Gasdruckes



Die nebenstehende Skizze zeigt einen teilweise dargestellten Druckbehälter mit dem Fluid mit der Dichte ϱ_G, an dem ein U-Rohr-Manometer (rechts) angeschlossen ist. Auf den linken Schenkel wirkt der Druck des Behälters p_G, und die Fluidsäule des im Druckbehälter befindlichen Fluids, auf den rechten Schenkel der Referenzdruck p_0. Die Flüssigkeit habe die Dichte ϱ_{Fl}.

Sie sehen auch die **Bezugslinie**, die wieder an der Stelle positioniert wurde, an der sich unterhalb das gleiche Fluid befindet. An der Bezugslinie herrscht ein Druckgleichgewicht. Das heißt, der Druck links ist ebenso p_{BZL} wie der Druck rechts p_{BZL}.Das folgende Tafelbild zeigt das Aufstellen der Gleichungen.

Links

$$p_{BZL} = p_1 = p_G + \varrho_G \cdot g \cdot h_1$$

Rechts

$$p_{BZL} = p_0 + \varrho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$p_G + \varrho_G \cdot g \cdot h_1 = p_0 + \varrho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h$$

Häufig wird der Druck der Gassäule vernachlässigt: $\varrho_G \ll \varrho_{Fl}$

$$\downarrow$$

$$p_G = p_1 = p_0 + \varrho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h$$

Bemerkenswert ist hierbei, dass wir hier in diesem Lehrbeispiel links auch die Fluidsäule mitberücksichtigen. In den meisten Fällen, in denen es sich bei dem Behälterfluid um Gase oder Dämpfe handelt, kann diese Fluidsäule vernachlässigt werden, da die Dichte der Gassäule häufig um den Faktor 500…1000 kleiner ist. Das bedeutet, dass bei Systemen, die nicht zu viel Ausdehnung in der Höhe haben, die linke Seite ohne $\varrho_G \cdot g \cdot h_1$ geschrieben wird.

Die letzte Gleichung im oben stehenden Tafelbild zeigt, die Berechnung des **Absolutdrucks** im Behälter p_G aus einer Messung mit einem **Manometer** bei bekanntem **Referenzdruck** p_0.

Das Manometer zeigt einen **Differenzdruck**. In diesem Fall herrscht im Behälter ein **Überdruck**. Das ist leicht daran zu erkennen, dass der linke Schenkel des U-Rohr-Manometers, der mit dem Druckbehälter verbunden ist, einen niedrigeren Flüssigkeitspegel zeigt als der rechte Schenkel, der mit dem Referenzdruck verbunden ist.

Das heißt also, dass der tiefer liegende Flüssigkeitsspiegel den höheren **Absolutdruck** anzeigt.

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *H – Hydrostatik* zu finden.

3 Statischer Auftrieb

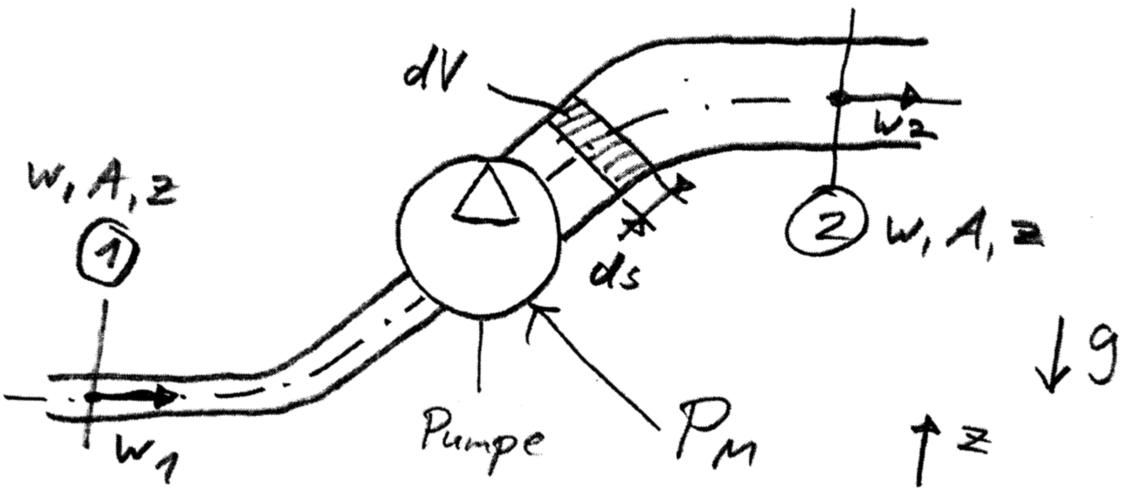
Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *A – Hydrostatischer Auftrieb* zu finden.

4 Energiesatz – 1. Hauptsatz – Bernoulli-Gleichung

4.1 Allgemeiner Energieerhaltungssatz – Energiebilanz

Nachdem wir nun die Hydrostatik wie im Schlaf beherrschen, können wir uns dem wichtigen Thema des Energieerhaltungssatzes widmen. Ich darf erinnern, dass wir innerlich akzeptiert haben, dass die Fluidmasse in einem System weder verlorengeht noch irgendwoher erscheinen kann (Kontinuitätsgleichung), was sich bei inkompressiblen Fluiden, also wenn die Dichte des Fluides im Verlauf der Strömung konstant bleibt, auch auf den Volumenstrom anwenden lässt.

Jetzt schauen Sie bitte auf das folgende Tafelbild. Hier dargestellt ist ein Rohrsystem. Sie sehen von (1) bis zur Pumpe eine Rohrleitung mit einem etwas geringeren Strömungsquerschnitt. Dagegen ist der Querschnitt etwas größer im Bereich nach der Pumpe bis (2). Wir sehen auch, dass (2) geodätisch – hier wieder ein Bezug zur **Hydrostatik** – höher liegt als (1).



Zwischen (1) und (2) ist noch eine Pumpe angeordnet, eine Arbeitsmaschine, eine Maschine, die dem Fluid Energie zufügt. Deshalb nennen wir diese Stelle in einem System auch **Energiezufuhr**.

Eine **Energieabfuhr** erhalten wir mit einer Kraftmaschine, zum Beispiel mit einer Turbine oder einem Hydromotor (hydraulische Kolbenmaschine).

In dem Tafelbild sehen wir noch die Größen Geschwindigkeit w, die durchströmte Fläche (Strömungsquerschnitt) A und die geodätische Höhe (die Höhe in einem Schwerebeschleunigungsfeld) z. Alle Größen werden mit **Indizes** versehen. Der Index 1 bedeutet hier, dass sich die Größe auf die entsprechend mit einer 1 markierten Stelle bezieht, also zum Beispiel die Geschwindigkeit w_1 an der Stelle (1).

Wie die Stellen und damit die Indizes bezeichnet werden, ist völlig unerheblich. Stellen könnten auch (A) oder (Eintritt) oder sonst wie heißen. Wir übernehmen in

Auslegungsberechnungen einfach die Bezeichnungen der Positionen des Strömungssystems aus der Skizze als Indizes in unsere Gleichungen.

Jetzt wollen wir noch ein paar Vereinbarungen treffen. Ab jetzt ist es wichtig, dass wir die Vorzeichen beachten, sodass wir beim Umstellen der Gleichungen (Lösen nach einer Variablen) keine mathematischen und vor allem physikalischen Fehler machen. Hier kommt die allgemein gültige Formulierung:

- Energiezufuhr von der Maschine zum Fluid: $+$
- Energieabfuhr vom Fluid zur Maschine: $-$

Wir nehmen für die folgenden Betrachtungen an, dass es sich um eine stationäre und inkompressible Strömung handelt. Die Verluste durch reibungsbehaftete Strömung betrachten wir später.

Jetzt wollen wir den Energiesatz herausarbeiten. Der Erfahrungssatz besagt, dass Energie in einem System erhalten bleiben muss, also weder verlorengeht noch irgendwoher erscheinen kann. Unsere Strömung aus dem Tafelbild von der vorherigen Seite soll als Stellvertreter für alle Strömungen stehen und besteht gleich aus mehreren Energieströmen $\dot{E}$:

- Kinetischer Energiestrom $\dot{E}_{kin}$
- Druckenergiestrom $\dot{E}_{Druck}$
- Höhenenergiestrom $\dot{E}_{Höhe}$
- Reibungsenergiestrom (Reibungswärmestrom) $\dot{Q}$
- Zugeführter oder abgeführter Energiestrom P_M

Für eine beliebige Strömung in einem Rohrleitungssystem gilt:

$$\dot{E}_{kin} + \dot{E}_{Druck} + \dot{E}_{Höhe} + \dot{Q} + P_M = \text{konstant}$$

Energieerhaltungssatz

Diese wichtige Grundgleichung merken Sie sich bitte! Wir wollen die einzelnen Terme dieser Gleichung jetzt einzeln betrachten, wobei $\dot{m}$ $[\mathrm{kg/s}]$ der Fluidmassenstrom mit der Dimension $\mathrm{kg/s}$ ist, w $[\mathrm{m/s}]$ die Strömungsgeschwindigkeit, p $[\mathrm{Pa}]$ der Druck, ϱ $[\mathrm{kg/s}]$ die Dichte des Fluides, z $[\mathrm{m}]$ die geodätische Höhe, g $[\mathrm{m/s^2}]$ die Schwerebeschleunigung (Erdbeschleunigung), $\dot{Q}$ $[\mathrm{W}]$ die Reibungswärme („Energieverluste“ im System) und P_M $[\mathrm{W}]$ der zwischen Fluid und Maschine ausgetauschte Energiestrom:

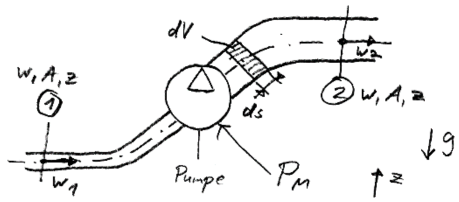
- $\dot{E}_{kin} = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w^2$ (Das erinnert Sie bestimmt an die kinetische Energie einer Masse m mit der Geschwindigkeit v mit $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$.)
- $\dot{E}_{Druck} = \frac{\dot{m}}{\varrho} \cdot p = \dot{V} \cdot p$ (bekannt aus der Hydraulik)
- $\dot{E}_{Höhe} = \dot{m} \cdot g \cdot z$

- $\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_V \cdot \Delta T$ mit der spezifischen Wärmekapazität c_V $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}\right]$ und der Temperaturänderung ΔT $[\mathrm{K}]$ mit $c_V \cdot \Delta T = \varphi$ $\left[\frac{m^2}{s^2} = \frac{J}{kg}\right]$ mit der spezifischen Dissipation φ
- $P_M = \dot{m} \cdot w_t$ → Achtung! w_t ist keine Strömungsgeschwindigkeit. Es handelt sich hierbei, wie in der Technik üblich um das abgeleitete Formelzeichen Klein-W von der technischen Arbeit W $[\mathrm{J}]$. Wenn eine Größe auf die Fluidmasse bezogen wird, also pro Kilogramm, dann schreibt man den Buchstaben klein und nennt die Größe spezifische Größe. Hier bedeutet das w_t $\left[\frac{J}{kg}\right]$ **spezifische technische Arbeit** (der Pumpe, der Turbine).

Alle Energieströme haben die Dimension $[\mathrm{W}]$ (Watt).

Unsere allgemeine Energiegleichung für ein Rohrleitungssystem mit den Stellen (1) und (2) lautet wie folgt:

$$\dot{E}_{kin,1} + \dot{E}_{Druck,1} + \dot{E}_{Höhe,1} \pm P_M = \dot{E}_{kin,2} + \dot{E}_{Druck,2} + \dot{E}_{Höhe,2} + \dot{Q}$$



Beachten Sie bitte, dass sich die Stelle (1) aus unserem Beispiel im Tafelbild von vorhin (siehe S. 4-1, hier noch einmal in klein) in Strömungsrichtung gesehen vor der Energiezufuhr befindet und die Stelle (2) danach. Um die Energieströme richtig zu bilanzieren, ist es erforderlich, die Energiezufuhr und die Energieabfuhr auf dieser richtigen linken Seite der Gleichung zu notieren, und zwar mit dem richtigen Vorzeichen:

Vorzeichenregelung für P_M:

- Pumpe → Arbeit wird (plus $+$) dem Fluid zugeführt
- Turbine → Arbeit wird (minus $-$) aus dem Fluid abgeführt.

Wenn wir jetzt für die Energiestrom-Terme die einzelnen Zusammenhänge einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\dot{m}}{2} w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\varrho} p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 \pm \dot{m} \cdot w_t = \frac{\dot{m}}{2} w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\varrho} p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 + \dot{m} \cdot \varphi$$

Das ist schon die berühmte **Bernoulli-Gleichung** in der Dimension der Leistung $[\mathrm{W}]$. *Dieser Satz suggeriert schon, dass es wohl mehrere Formen davon gibt.* Übrigens: Sie sehen, dass der Verlust an Energie rechts **hinzugefügt** wird. Das ist korrekt. Die Energiegleichung ist eine Bilanzierung der Energieströme. Damit die Gleichung eine Gleichung ist und keine Ungleichung, ist es notwendig, auf der rechten Gleichungsseite, die durch Reibung nicht mehr nutzbaren Energieanteile (kinetisch, Druck, Höhe) als Verlust hinzuzufügen.

4.2 Inkompressible reibungslose Strömung (Bernoulli-Gleichung) – Geschwindigkeits-, Druck-, Höhenform

Wir vereinfachen jetzt kurzzeitig unseren Fall, indem wir die Energiezufuhr und Energieabfuhr ebenso wenig betrachten wie die Reibungsverluste. Wir wollen jetzt die drei anderen Formen der Energiegleichung herleiten und uns merken, dass die Bernoulli-Gleichung in verschiedenen Formen daherkommen kann und stets in alle anderen Formen überführt werden kann.

Unsere vereinfachte Gleichung Dimension $[\mathrm{W}]$ (Watt) lautet jetzt:

$$\frac{\dot{m}}{2} w_1^2 \quad + \quad \frac{\dot{m}}{\varrho} p_1 \quad + \quad \dot{m} \cdot g \cdot z_1 \quad = \quad \frac{\dot{m}}{2} w_2^2 \quad + \quad \frac{\dot{m}}{\varrho} p_2 \quad + \quad \dot{m} \cdot g \cdot z_2$$

Als erstes bilden wir die **Geschwindigkeitsform**, indem wir die gesamte Gleichung durch den Massenstrom teilen.

Aus $\left[W = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ wird $\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$:

$$\frac{w_1^2}{2} \quad + \quad \frac{p_1}{\varrho} \quad + \quad g \cdot z_1 \quad = \quad \frac{w_2^2}{2} \quad + \quad \frac{p_2}{\varrho} \quad + \quad g \cdot z_2$$

kin. E **Druck-E** **pot. E** **kin. E** **Druck-E** **pot. E**

Die **Druckform** kommt sehr häufig vor. Sie entsteht durch Multiplizieren der Geschwindigkeitsform mit ϱ.

Aus $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}}\right]$ wird $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}\right]$:

$$\frac{\varrho}{2} w_1^2 \quad + \quad p_1 \quad + \quad \varrho \cdot g \cdot z_1 \quad = \quad \frac{\varrho}{2} w_2^2 \quad + \quad p_2 \quad + \quad \varrho \cdot g \cdot z_2$$

dyn. Druck **stat. Druck** **geodät. Druck**

Jetzt kommt noch die **Höhenform**, die sich mittels Division durch g und ϱ ergibt.

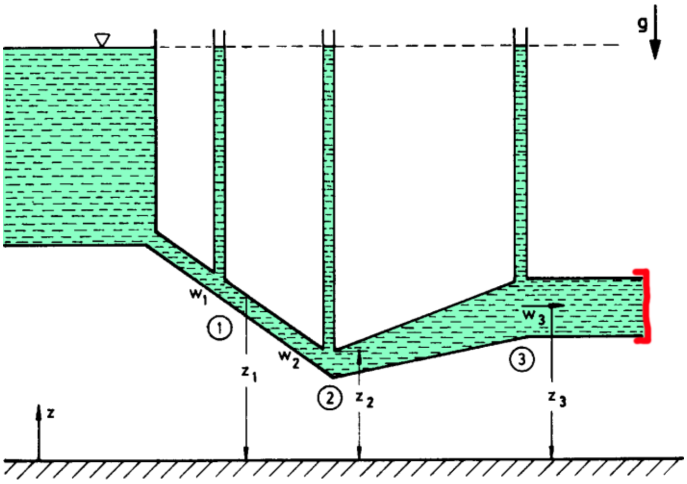
Aus $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$ wird $[\mathrm{m}]$:

$$\frac{w_1^2}{2 \cdot g} \quad + \quad \frac{p_1}{\varrho \cdot g} \quad + \quad z_1 \quad = \quad \frac{w_2^2}{2 \cdot g} \quad + \quad \frac{p_2}{\varrho \cdot g} \quad + \quad z_2$$

Geschw.-Höhe **Druckhöhe** **geodät. Höhe**

Man sieht, dass die namengebende Bezeichnung auch die Dimension angibt. Bei der **Höhenform** ist die Dimension eine Höhe, eine Strecke. Bei der **Druckform** ist die Dimension der Druck. Das heißt, alle Terme der Bernoulli-Gleichung haben in dieser Form die Dimension des Drucks. Nur die als **Geschwindigkeitsform** bezeichnete Form weicht ein wenig ab. In Wirklichkeit hat diese Form die Dimension der spezifischen Energie.

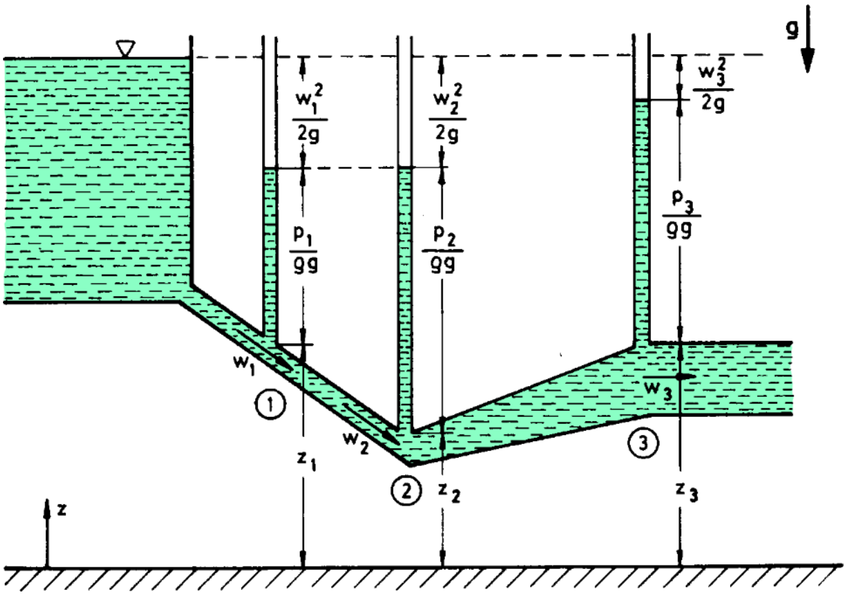
Für das gleich noch folgende Tafelbild skizzieren wir hier zunächst den statischen Fall. Schauen Sie mal hier in die nebenstehende Abbildung. Man sieht ein Rohrsystem, angeschlossen an ein sehr weites Gefäß (links im Bild). Außerdem gibt es einige Steigröhren an den Stellen (1), (2) und (3). Wie wir es aus der Hydrostatik kennen (kommunizierende Röhren), ist der Flüssigkeitspegel in allen Steigröhren genauso hoch wie in dem weiten Gefäß.

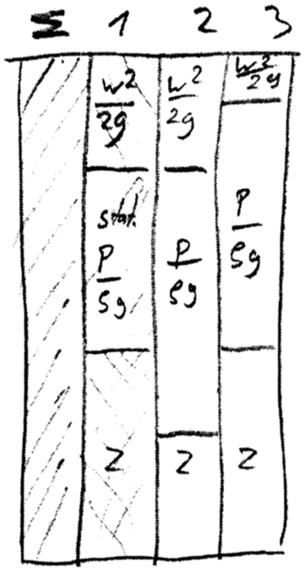


Wenn wir jedoch den rot eingezeichneten Verschluss öffnen, erhalten wir das Bild am Ende der Seite. Es stellen sich nun ganz andere Höhen in den Röhren ein, und wenn Sie genau hinsehen, erkennen Sie die Terme aus der Höhenform der Bernoulli-Gleichung von der vorherigen Seite wieder. Wir müssen das jetzt auseinandernehmen.

Wir haben ja am Anfang dieses Kapitels gesagt, dass es sich hier um einen Energieerhaltungssatz handelt und haben das Wort Bilanz in dem Zusammenhang erwähnt. Die Skizze hier oberhalb soll illustrieren, dass die vorhandene Energie an jeder Stelle gleich ist. Das gilt für das Gefäß genauso wie für alle drei Stellen von (1) bis (3). Wie ist das möglich und wie erklären sich dabei diese unterschiedlichen Flüssigkeitshöhen?

Die Handskizze neben obiger Abbildung soll illustrieren, dass der Energiegehalt an allen Stellen gleich ist, also die Summe der Energieanteile Geschwindigkeit, statischer Druck und geodätische Höhe.





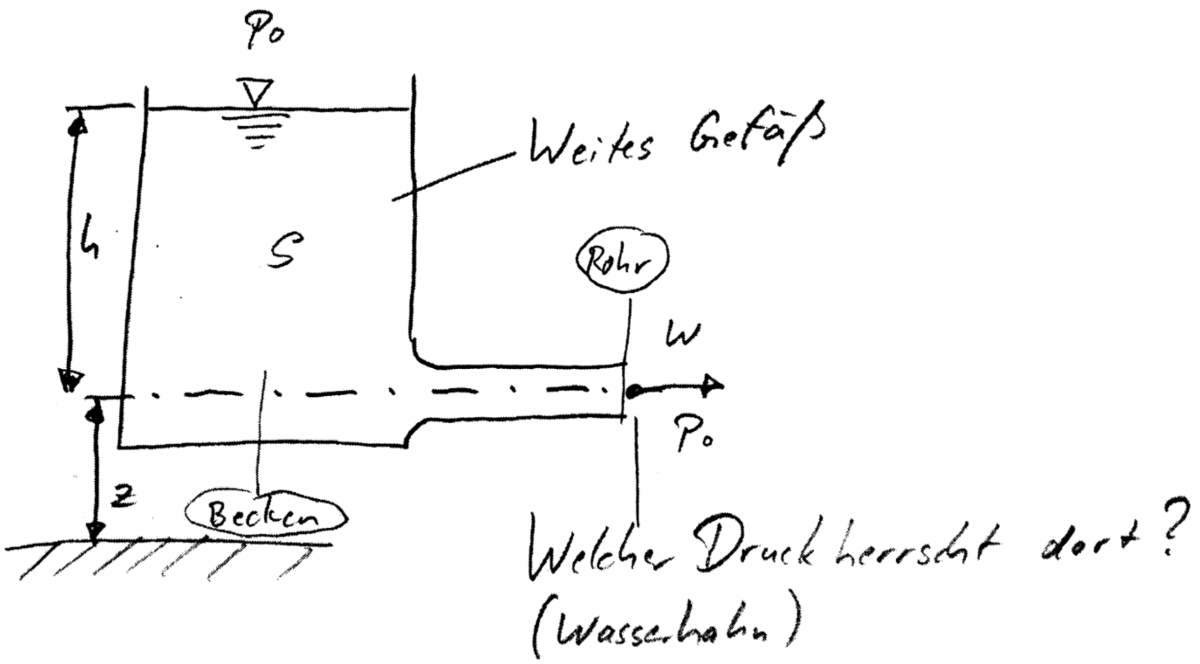
Zwar bleibt die Strömungsgeschwindigkeit von (1) nach (2) gleich, jedoch erhöht sich die Höhe der darüber liegenden Flüssigkeitssäule, sodass der statische Druckanteil steigt. Als

Ausgleich steht im Steigrohr über (2) eine höhere Flüssigkeitssäule als über (1). Allerdings ist hier aufgrund der gleichen Geschwindigkeit der jeweilige Flüssigkeitsspiegel auf gleicher Höhe. Anders ausgedrückt fehlt von oben (Flüssigkeitspegel des offenen weiten Gefäßes) genau die die gleiche ((1) und (2)) sogenannte Geschwindigkeitshöhe.

An Stelle (3) strömt das Fluid wegen der Kontinuitätsgleichung bei größerem Strömungsquerschnitt mit geringerer Geschwindigkeit. Der Geschwindigkeitsanteil der Gesamtenergie muss also geringer sein. Dies ist sichtbar oberhalb des Flüssigkeitsspiegels im Steigrohr – es fehlt weniger von der Geschwindigkeitshöhe. Gleichzeitig ist der statische Druck höher, was durch die Höhe der Flüssigkeitssäule im Steigrohr angezeigt wird. Der statische Druck (statische Druckhöhe) ist aber nur um so viel höher, wie es die geodätische Höhe z_3 zulässt, denn (3) liegt geodätisch höher als (2).

Übrigens: Eine Anwendung der Druckhöhe kennen Sie aus der Anzeige in einem U-Rohr-Manometer, in dem ja nicht der Druck angezeigt wird, sondern die Druckhöhe. Aufgrund des hydrostatischen Zusammenhangs ermitteln Sie dann daraus mithilfe der bekannten Dichte und der Schwerebeschleunigung die Druckdifferenz.

4.3 Anwendung der Energie-Gleichung



Die Abbildung zeigt ein weites Gefäß, gefüllt mit einer Flüssigkeit, an dessen unterem Ende ein Ausfluss angebracht ist. So, wie es dargestellt ist, strömt aus diesem Ausfluss das Fluid mit der Geschwindigkeit w aus. Zur Analyse der Situation begeben wir uns auf die Bezugslinie in der Skizze auf Höhe z über dem Boden. Im Becken herrscht die Geschwindigkeit null. Am Austritt herrscht welcher Druck? Das ist jetzt wichtig!

Auf das Fluid am Austritt wirkt der Umgebungsdruck p_0. Jetzt können wir die Bernoulli-Gleichung aufstellen, linke Gleichungsseite – Becken; rechte Gleichungsseite – Ausflussöffnung. Wir nehmen die Druckform:

$$\frac{\varrho}{2} w^2 + p + \varrho \cdot g \cdot z = \text{konstant}$$

Das ist hier praktisch, jedoch könnten auch die anderen Formen verwendet werden.

Becken **Ausflussöffnung**

$$\frac{\varrho}{2} w_{Becken}^2 + p_{Becken} + \cancel{\varrho \cdot g \cdot z} \quad = \quad \frac{\varrho}{2} w_{Rohr}^2 + p_{Rohr} + \cancel{\varrho \cdot g \cdot z}$$

Da die Bezugslinie die gleiche geodätische Höhe markiert und auch die Mathematik der obigen Gleichung dies hergibt, können wir den Term $\varrho \cdot g \cdot z$ kürzen. Im Gefäß (Becken) herrscht die Geschwindigkeit null, $w_{Becken} = 0$. Auf unserer Bezugslinie herrscht aber ein Druck. Sie kennen den aus der hydrostatischen Grundgleichung (siehe Kap. 2 ab S. 2-1):

$$p_{Becken} = p_0 + \varrho \cdot g \cdot h$$

und der statische Druck im Ausflussrohr ist, wie bereits erwähnt, der Umgebungsdruck:

$$p_{Rohr} = p_0$$

Wenn wir das jetzt einsetzen, erhalten wir die Bernoulli-Gleichung für unseren Fall:

Becken **Ausflussöffnung**

$$0 + \cancel{p_0} + \varrho \cdot g \cdot h \quad = \quad \frac{\varrho}{2} w_{Rohr}^2 + \cancel{p_0}$$

$$\varrho \cdot g \cdot h \quad = \quad \frac{\varrho}{2} w_{Rohr}^2$$

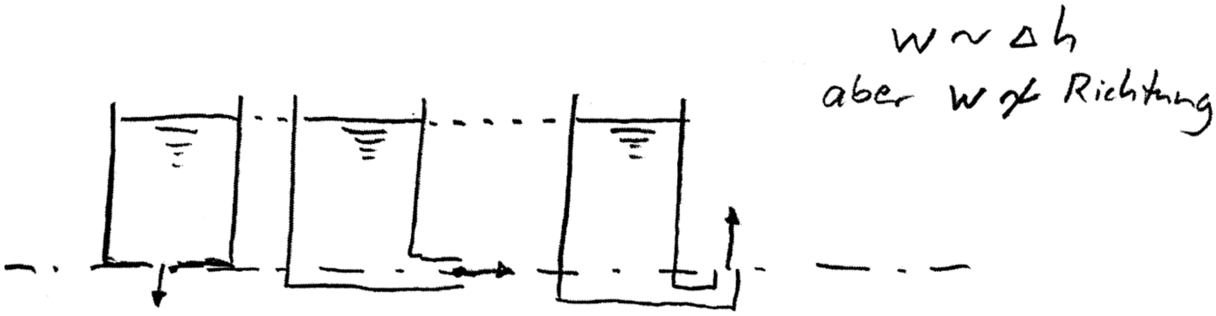
Das ist interessant. Der Umgebungsdruck ist jetzt auch ‚raus. Übrig bleibt nur die Flüssigkeitssäule mit der Höhe h. Aufgelöst nach der Geschwindigkeit erhalten wir für $h \geq 0$:

$$w_{Rohr} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

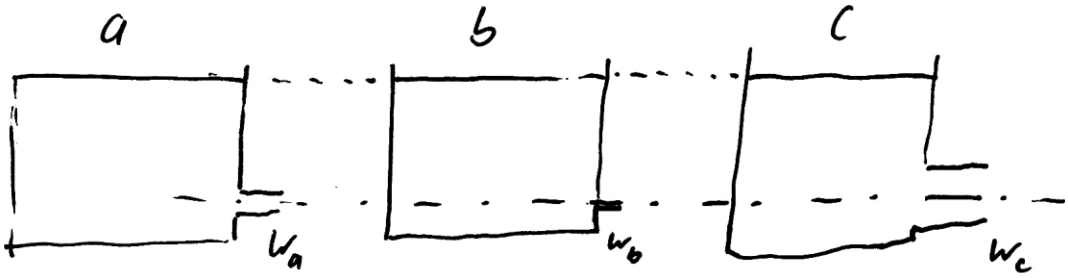
Ausflussformel nach Torricelli

Diese Formel kann man sich ruhig merken. Damit erhält man schnell die Lösung für viele Anwendungen und Übungsaufgaben.

Die Geschwindigkeit verhält sich proportional zur Höhe der Flüssigkeitssäule, ist aber unabhängig von der Ausflussrichtung, wie die folgenden beiden Abbildungen auf der nächsten Seite zeigen.



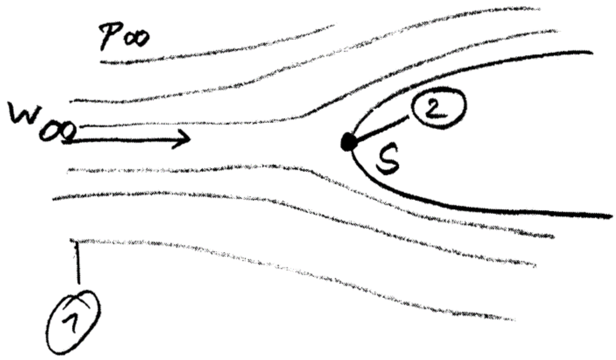
Die nächste Abbildung zeigt noch eine weiteren wichtige n Zusammenhang. Auch hier sind die Austrittsgeschwindigkeiten gleich groß, nicht aber die Massenströme. Die Massenströme sind mit den Volumenströmen vom Strömungsquerschnitt proportional abhängig, aber noch einmal: Die Austrittsgeschwindigkeit hängt nicht von der Größe der Austrittsöffnung ab.



Die Austrittsgeschwindigkeit hängt nur vom Austrittsgesamtdruck ab, also von der Summe aller noch.

4.4 Druck im Staupunkt

Jetzt müssen wir uns um einige korrekte Begriffe kümmern. Bitte schauen Sie zunächst auf die nebenstehende Abbildung: Dort ist ein Körper zu sehen, der von links nach rechts umströmt wird, das heißt der Körper bewegt sich durchs Fluid oder das Fluid strömt um den Körper herum. Die Geschwindigkeit der Umgebung an der Stelle (1) ist w_∞



An der Stelle (2) befindet sich der Punkt S. An diesem Punkt herrscht die **Geschwindigkeit null**. Das sollten wir uns merken!

Daraus folgen diese Konsequenzen: Bis hierher sollten wir schon akzeptiert haben, dass die Energie in einer Strömung erhalten bleibt. Wenn wir diesen Fall mit der Energiegleichung untersuchen, erhalten wir das folgende Tafelbild auf der nächsten Seite:

Im Staupunkt S ist $w = 0$

$$\Downarrow$$

$$w_2 = 0$$

$$\underbrace{\rho \cdot \frac{w_1^2}{2} + p_\infty}_{\substack{\text{Gesamtdruck} \\ p_{ges}}} = \rho \cdot \underbrace{\frac{w_2^2}{2}}_{0} + p_S$$

$$\rho \cdot \frac{w_\infty^2}{2} + p_\infty = 0 + p_S = p_{ges}$$

Auf der linken Seite der Gleichung ist der Zustand der Umgebung im Strömungsfeld mit der Geschwindigkeit größer als null dargestellt, auf der rechten Seite mit der Geschwindigkeit null. Daraus ergibt sich die letzte Zeile der Gleichung.

Der Term $\frac{\varrho}{2}w^2$ ist der **dynamische Druckanteil**. Verwendete Formelzeichen für den dynamischen Druck sind p_{dyn} oder q.

Das p, jeweils mit dem Index, der die Stelle bezeichnet, hier ∞ und S, aber ohne weitere Bezeichnung, ist der statische Druck.

p_{ges} bezeichnet den **Gesamtdruck**, also die Summe der anderen Druckanteile. Andere Bezeichnung für den Gesamtdruck sind **Totaldruck** oder **Ruhedruck**.

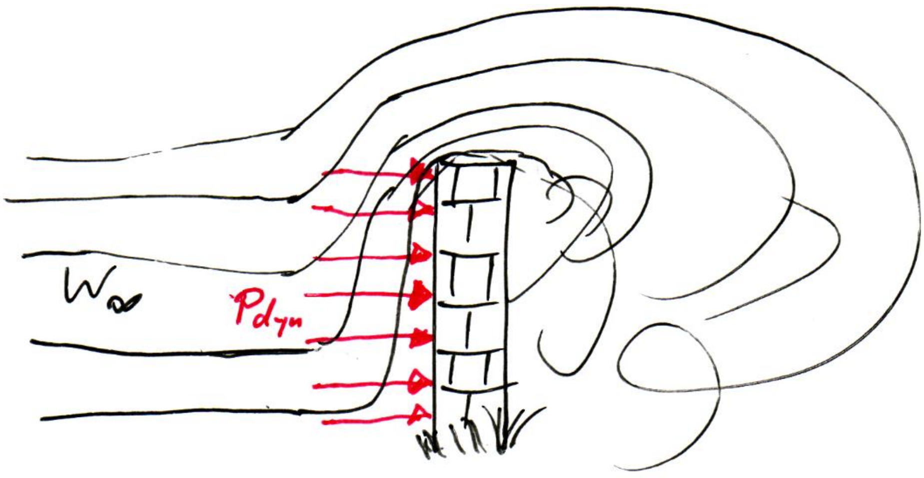
Aus der Gleichung geht hervor, dass hier, wo die Geschwindigkeit im Staupunkt gleich null ist, dafür der statische Druck so hoch sein muss wie der Gesamtdruck. Daher herrscht **im Staupunkt** auch immer **der Gesamtdruck**, während die Strömungsgeschwindigkeit null ist.

4.5 Der dynamische Druck – Staudruck

Jetzt wird es interessant. Zuerst haben wir vom **Druck im Staupunkt** gesprochen, jetzt führen wir den Begriff **Staudruck** ein. Das ist verwirrend, aber etabliert. Der Staudruck ist eine andere Bezeichnung für den dynamischen Druck.

Der dynamische Druck p_{dyn} ist <u>nicht</u> der Druck im Staupunkt.
Der Druck im Staupunkt S (in **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** 2)) **ist gleich dem Gesamtdruck: $p_S = p_{ges}$.**

Der beispielsweise gegen eine Wand prallende Wind (siehe Tafelbild auf der nächsten Seite) erzeugt eine Windlast, die mit der Windgeschwindigkeit steigt. Die Windlast F ist das Produkt aus p_{dyn} und der Fläche A.



Hier noch einmal zur Verinnerlichung:

Man unterscheidet Staudruck (dynamischer Druck) und Druck im Staupunkt!

4.6 Druckmessungen in der Strömung

Für diesen Teil empfehle ich noch einmal einen Blick in die Einführungsvorlesung. Dort wurden einige Strömungsmesstechnikmethoden gezeigt. Das sollte die folgenden Ausführungen gut illustrieren.

Wir erinnern uns: Eine direkte Geschwindigkeitsmessung in einem Fluid ist möglich mit einem Log (Log in die Strömung werfen, Zeit nehmen und Knoten auf der Schnur zählen) oder indem man Partikel mit nichtinvasiven Methoden erfasst. Dabei bewegen sich die Partikel mit dem Fluid. Die Geschwindigkeit des Fluids ist dann die Geschwindigkeit der lasererfassten Partikel.

Eine indirekte Geschwindigkeitsmessung in einer Strömung ist möglich, wenn man zwei verschiedene Drücke misst und die Dichte des Fluids kennt. Dafür ist dann möglicherweise noch eine Temperaturmessung notwendig.

Pitot–Rohr (Staudrucksonde) in einer Strömung

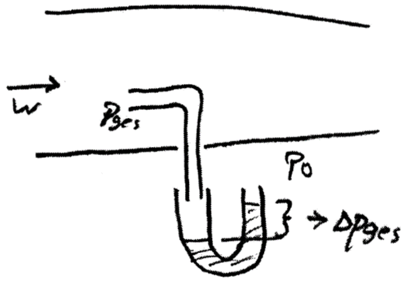
Wenn wir auf das folgende Tafelbild auf der nächsten Seite schauen, erkennen wir das grundsätzliche Prinzip einer Staudruckmessung mittels Staudrucksonde. Wie wir gerade gelernt haben, sollten wir den Worten nicht trauen. Wir fassen noch einmal zusammen:

- Staudruck ist der dynamische Druck
- Gesamtdruck ist der Druck im Staupunkt
- **Neu:** Staudrucksonde: In die Strömung gerichtetes Rohrende, mit dem man Achtung! Den Gesamtdruck im Staupunkt misst, nicht jedoch den Staudruck, obwohl es Staudrucksonde heißt. Die Staudrucksonde ist unter dem Namen Pitot-Rohr bekannt.

Standrucksonde (Pitot-Rohr)

- befindet sich im strömenden Fluid
- entgegen der Strömung ausgerichtet

(Messleitung → verlustfrei zum Messgerät; in der Messleitung keine Strömung (dämpfend))



Der Gesamtdruck, der durch das Pitot-Rohr detektiert wird, ist höher als der statische Druck in der Strömung. Die Manometeranzeige im Tafelbild illustriert diesen Umstand.

Achtung: „Standrucksonde" – deutscher Fachausdruck

aber Messung des Gesamtdrucks, des Drucks im Staupunkt!

„Standruck" $= p_{dyn} = q \rightarrow p_{ges} = p + q$

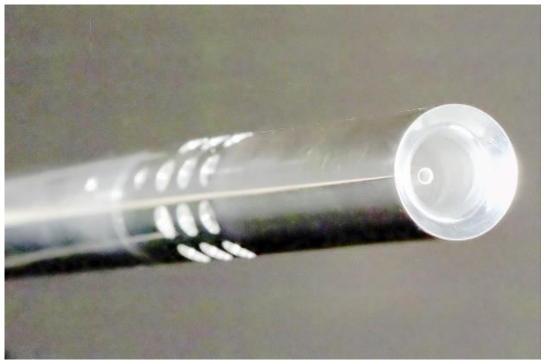
Eine erweiterte Variante des Pitot-Rohrs, dass gern in der Messtechnik verwendet wird, aber auch Vorteile in der Luftfahrt bietet, ist das ummantelte Pitot-Rohr. Wird das Pitot-Rohr nicht ummantelt, wirkt sich eine Falschanströmung (schräg) auf das angezeigte Messergebnis aus.

Bei schräger Anströmung ist der vom Röhrchen weitergeleitete Druck eine undefinierte Mischung aus Gesamtdruck und statischem Druck, zu dem wir im nächsten Unterabschnitt kommen. Eine Prinzipskizze des ummantelten Pitot-Rohrs ist im folgenden Tafelbild dargestellt.

Erweiterte Form

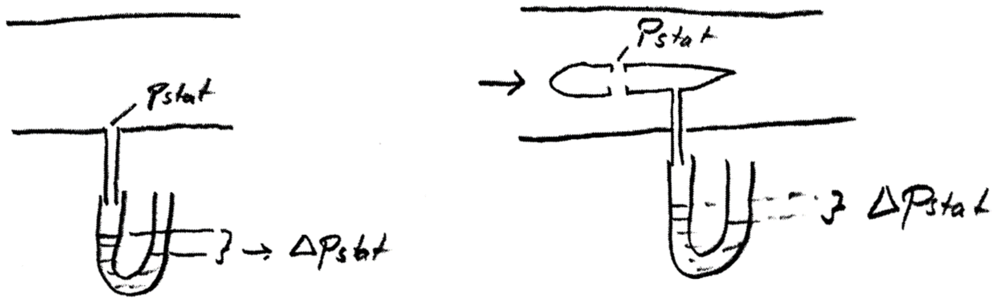
Ummanteltes Pitot-Rohr

Vorteil: Richtungsunempfindlicher



In den obenstehenden beiden Abbildungen sehen Sie praktisch ausgeführte ummantelte Pitot-Rohre.

Statische Druckmessung in einer Strömung



Formelzeichen: Barometer: p, p_{stat} (absolut)

Manometer: Δp, $p_ü$, p_u

Ein oder zwei Blicke auf das Tafelbild hierüber lässt das Prinzip der statischen Druckmessung erkennen. Die Bohrung, durch die der zu messende Druck weitergeleitet wird, muss quer zur Strömungsrichtung angeordnet werden. Das kann man machen mit einer oder mehrerer Wandbohrungen oder wie im rechten Teil zu sehen mit einer in die Strömung gehaltenen Sonde, die ebenfalls eine oder mehrere Bohrungen enthalten kann.

Übrigens, ein Wort zur Wiederholung: Hier werden Differenzdrücke gemessen. Das heißt, das vom Messgerät – hier jeweils ein U-Rohr-Manometer – angezeigte Messergebnis ist nicht der statische Druck p, sondern die statische Druckdifferenz Δp. Das bedeutet, dass wir den Referenzdruck noch dazu addieren müssen, um den absoluten statischen Druck p zu erhalten.

Der statische Druck ist übrigens immer kleiner als der Gesamtdruck der Strömung.

Prandtl-Rohr (Prandtl-Sonde) in einer Strömung

Bis jetzt kennen wir die Einzelmessungen für statischen Druck und Gesamtdruck. Warum sollten wir das nicht zusammenfassen, insbesondere die eigentliche Messung? Da können wir uns vielleicht ein Messgerät sparen.

Zuerst analysieren wir aber noch einmal, was wir mit der Messung der beiden verschiedenen Drücke anfangen können. Bitte schauen Sie auf das folgende Tafelbild.

Pitot $\rightarrow p_{ges}$

Wandbohrung $\rightarrow p_{stat}$

$\Downarrow$

aus Bernoulli (Druckform)

$$\underbrace{p_{ges}}_{\text{Druck im Staupunkt (Pitot)}} = \underbrace{p_{dyn}}_{\text{Geschwindigkeit}} + \underbrace{p_{stat}}_{\text{Wandbohrung}} = \varrho \frac{w^2}{2} + p_{stat}$$

$\Downarrow$

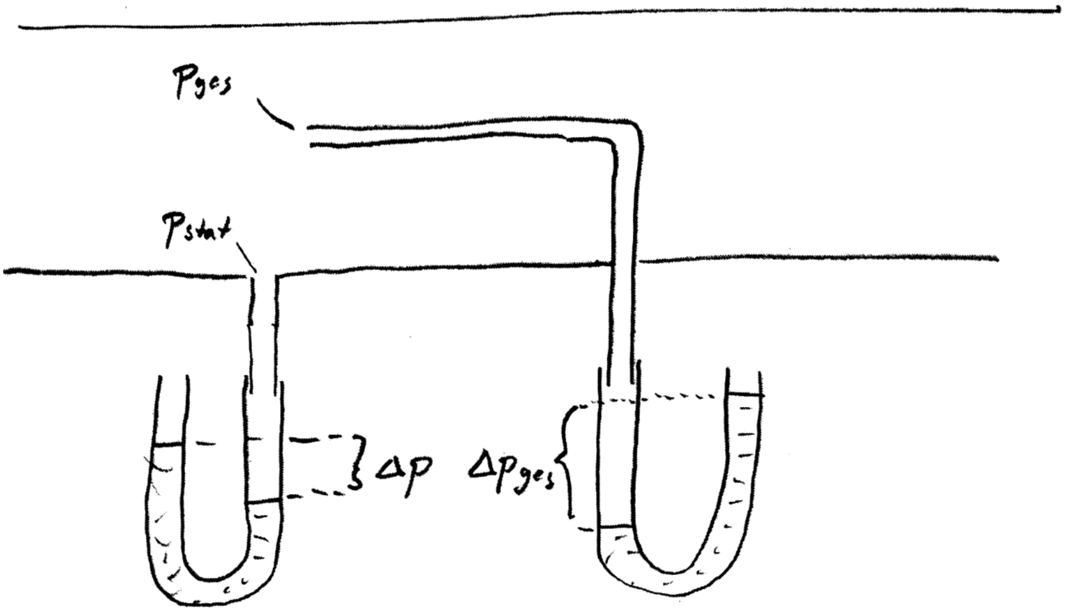
$$p_{dyn} = \varrho \frac{w^2}{2} = p_{ges} - p_{stat}$$

Die Anwendung der Bernoulli-Gleichung zeigt, dass die gesuchte Geschwindigkeit im dynamischen Druck steckt. Nach dem dynamischen Druck umgestellt, erhalten wir die Druckdifferenz. Und das ist auch das einfache Prinzip der Bestimmung der Geschwindigkeit aus der Messung von statischem und Gesamtdruck im selben Strömungsquerschnitt. Wir benötigen nur die Dichte und die beiden Drücke und erhalten die Strömungsgeschwindigkeit mit

$$w = \sqrt{2 \cdot \frac{p_{dyn}}{\varrho}} = \sqrt{2 \cdot \frac{p_{ges} - p_{stat}}{\varrho}}$$

… je nach Geschmack.

Schauen Sie mal bitte auf das Tafelbild nächste Seite: Wir messen zwei Drücke und rechnen. Wir ziehen den einen Druck von dem anderen ab.



Falls wir mit Manometern arbeiten und beide Manometer auf der Referenzseite mit dem gleichen Druck beaufschlagt werden, erleichtert dies die Berechnung. Sie sehen schön, dass sich der Referenzdruck, z. B. der Umgebungsdruck, herauskürzen müssen. Mit

$$p_{ges} = \Delta p_{ges} + p_{ref} \qquad \text{und} \qquad p_{stat} = \Delta p_{stat} + p_{ref}$$

ergibt sich für die Druckdifferenz zwischen Gesamtdruck und statischem Druck

$$p_{ges} - p_{stat} = \Delta p_{ges} + p_{ref} - \Delta p_{stat} - p_{ref}$$

und wir erhalten

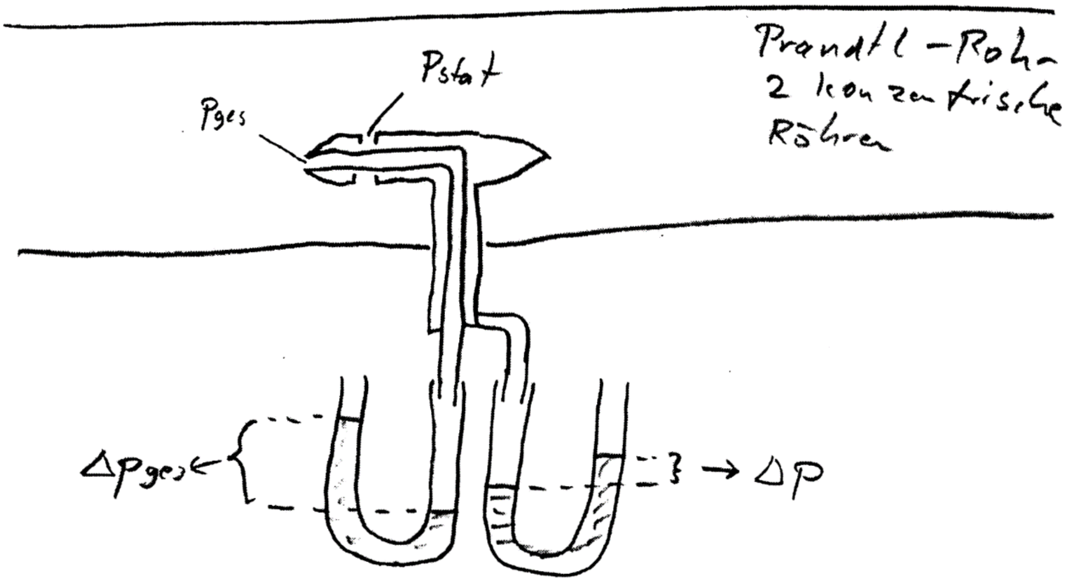
und damit

$$w = \sqrt{2 \cdot \frac{\Delta p_{ges} - \Delta p_{stat}}{\varrho}}$$

Das heißt, bei gleichen Referenzdrücken können wir ohne Fehler direkt die Druckdifferenzen für die Berechnung verwenden.

Die getrennte Messung von statischem Druck und Gesamtdruck kann man auch in einer Sonde zusammenfassen. Diese Sonde nennen wir Prandtl-Rohr oder Prandtl-Sonde. Das Tafelbild auf der nächsten Seite zeigt sie als Prinzipskizze.

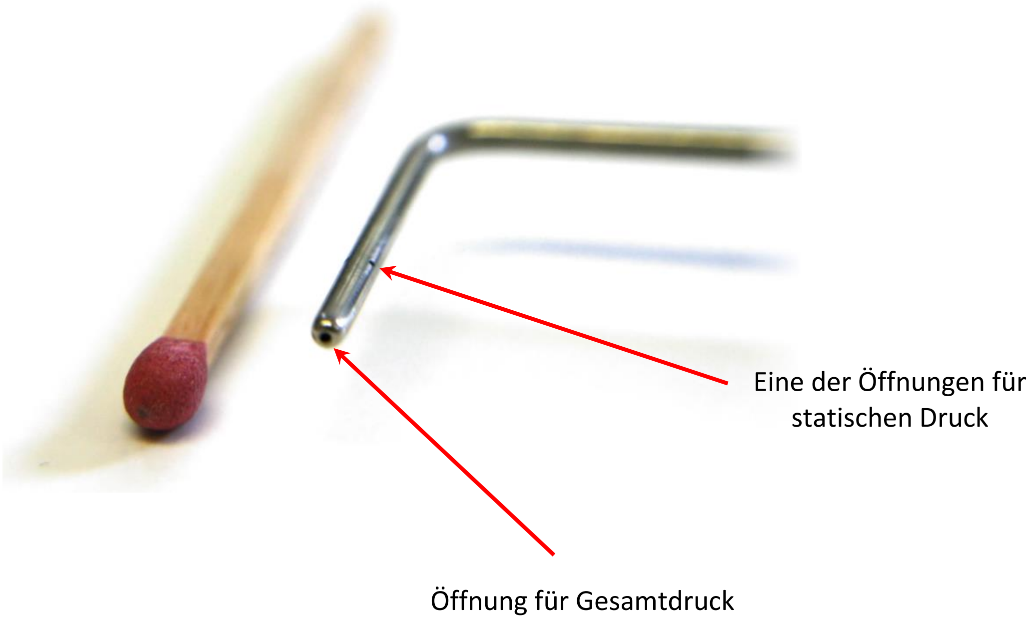
In der Prandtl-Sonde sind Querbohrungen und Gesamtbohrung in einem stromlinienförmigen Körper vereint

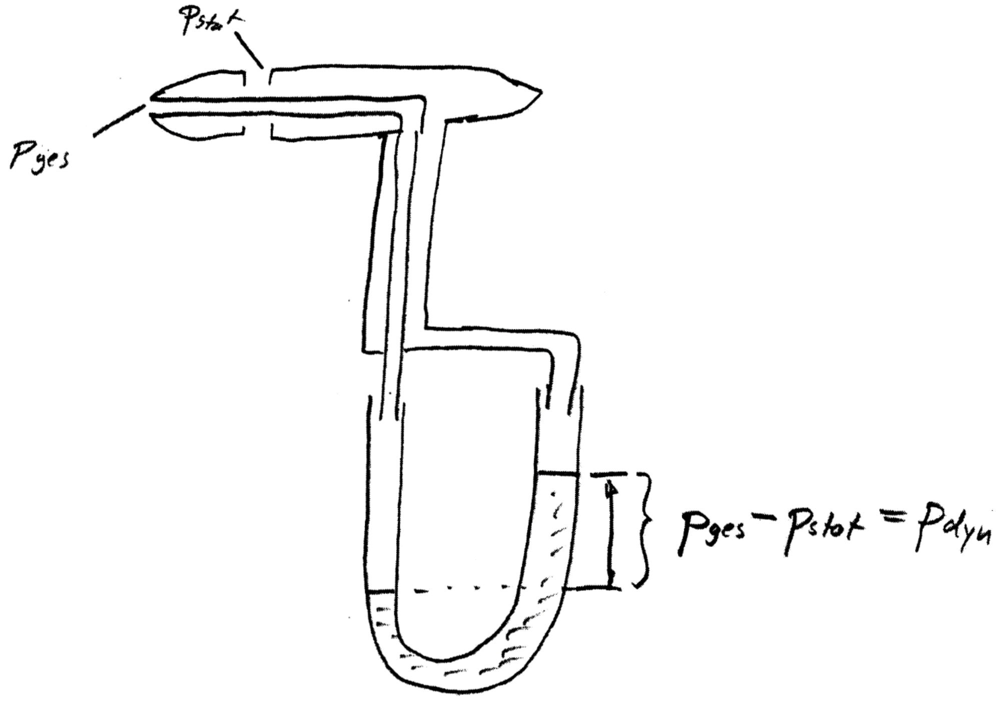


Am Messprinzip ändert sich nichts. Im Allgemeinen sollte uns klar sein, dass bei der Druckmessung die Sonde und das Gerät, dass den Druck in ein Signal oder eine Anzeige umsetzt, voneinander getrennt zu sehen sind.

Das Messgerät bzw. der Messumsetzer bestimmt, ob es sich beim angezeigten Druck um einen Absolutdruck (Barometer) oder einen Differenzdruck (Manometer handelt). Die Sonde hingegen bestimmt, ob es sich bei dem detektierten Druck in der Strömung um einen statischen Druck oder einen Gesamtdruck handelt.

Die folgende Abbildung zeigt eine ausgeführte Prandtl-Sonde. Die Abbildung kennen Sie vielleicht schon aus der Einführungsvorlesung.





$$p_{dyn} = \rho \frac{w^2}{2}$$

Jetzt müssen wir uns noch die Frage gefallen lassen, warum wir eigentlich zwei Drücke messen. Laut Berechnungsformel brauchen wir gar nicht die Absolutdrücke für unsere Geschwindigkeit. Schon die Analyse mit den Referenzdrücken hat gezeigt, dass wir ohne auskommen.

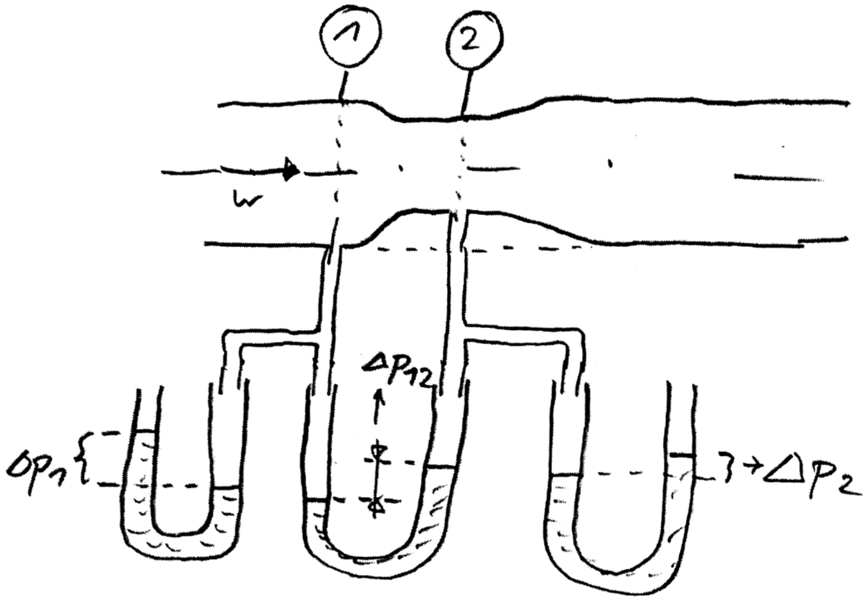
Bitte werfen Sie einen Blick auf das Tafelbild oben! Wenn man doch mit einem Manometer die Druckdifferenz messen kann, warum nicht auch die Druckdifferenz aus Gesamtdruck und statischem Druck?

Genauso wird das in der Praxis (Luftfahrt) auch gemacht. Man benötigt trotzdem noch eine Angabe über die Dichte des Fluids. Kann man die ermitteln, reicht ein Druckmessgerät, ein Manometer für die Bestimmung der Geschwindigkeit einer Strömung.

Venturi-Düse

Der letzte Unterabschnitt der Geschwindigkeitsmessung befasst sich mit der Venturi-Düse (auch Venturi-Rohr). Grundsätzlich unterschiedlich zu den bisherigen Ausführungen ist, dass zwei statische Drücke gemessen werden oder die Druckdifferenz zweier statischer Drücke gemessen werden.

Der Blick aufs Tafelbild auf der nächsten Seite offenbart, dass die beiden statischen Drücke an unterschiedlich großen Strömungsquerschnitten gemessen werden, wobei prinzipiell egal wäre, ob zuerst ein kleinerer Strömungsquerschnitt, dann erweiterter und dann wieder der ursprüngliche kleinere Querschnitt durchströmt wird, oder wie es in einer Venturi-Düse ist, zuerst groß, dann Verengung und dann wieder groß.



$$\text{Konti:} \quad w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad (\dot{V} = \text{konst.})$$

Wir analysieren, natürlich mit der Bernoulli-Gleichung, hier wieder in der Druckform:

$$\frac{\varrho}{2} w_1^2 + p_1 = \frac{\varrho}{2} w_2^2 + p_2$$

Aus der Kontinuitätsgleichung wissen wir (siehe Tafelbild hier oben):

$$w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

Dadurch erhalten wir die Zeilen im folgenden Tafelbild.

$$p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2} \cdot \left(w_1^2 - w_2^2 \right)$$

– und mit Konti

$$p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2} \cdot \left(w_1^2 - w_1^2 \cdot \frac{A_1^2}{A_2^2} \right)$$

$$= \frac{\varrho}{2} \cdot w_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right)$$

$\downarrow$

Für die Bestimmung von Geschwindigkeit erhalten wir dann

$$w_1^2 = \frac{2 \cdot (p_2 - p_1)}{\varrho \cdot \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_2 - p_1)}{\varrho \cdot \left[1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right]}}$$

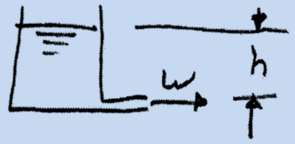
Wesentliche Merkmale bei der Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit mittels Venturi-Düse oder mithilfe zweier verschiedener Querschnitte liegen in der Messung der beiden unterschiedlichen statischen Drücke und Berücksichtigung des Flächenverhältnisses der durchströmten Querschnitte.

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *EoV – Energie- und Massenerhaltungssatz ohne Verluste* zu finden.

5 Inkompressible reibungslose Strömung mit Energiezufuhr – Spezifische Stutzenarbeit

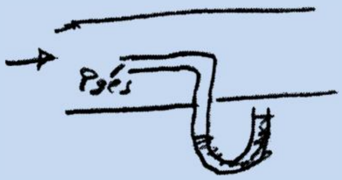
Kleine Wiederholung – Wichtige Gleichungen

Torricelli: $w = \sqrt{2gh}$



Staupunkt: Gesamtdruck

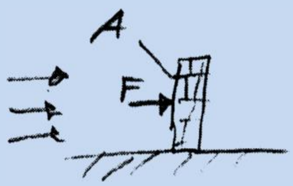
$$p_{ges} = \frac{\varrho}{2} w^2 + p_{stat}$$



Dynamischer Druck (Staudruck):

$$p_{dyn} = \frac{\varrho}{2} w^2 = p_{ges} - p_{stat}$$

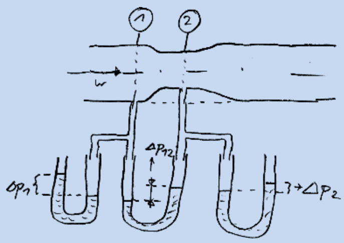
$$F = p_{dyn} \cdot A$$



Geschwindigkeitsmessung durch Messung zweier Drücke:

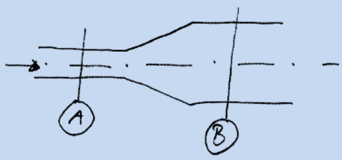
p_{ges} und p_{stat} oder $p_{ges} - p_{stat}$:

$$w = \sqrt{\frac{2}{\varrho} p_{dyn}} = \sqrt{\frac{2}{\varrho}\left(p_{ges} - p_{stat}\right)}$$



$p_{stat,1}$ und $p_{stat,2}$ oder $p_{stat,2} - p_{stat,1}$:

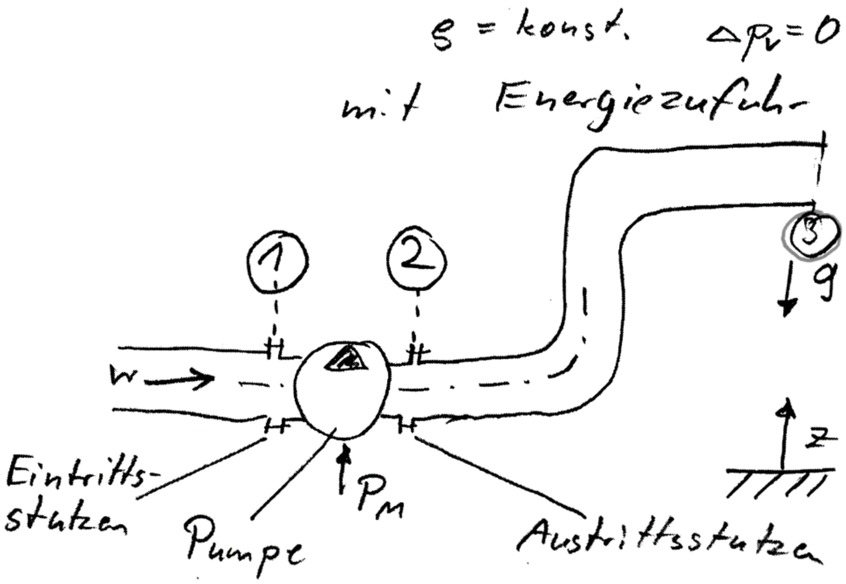
$$w = \sqrt{\frac{2}{\varrho} \cdot \frac{p_{stat,2} - p_{stat,1}}{1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}}$$



Energiezufuhr (dem strömenden Fluid zugeführt):

Wir wollen jetzt die Skizze aus Abschnitt 4.1 auf Seite 4-1 noch einmal in ähnlicher Weise aufgreifen. Bitte schauen Sie aufs nächste Tafelbild. Zwischen den Stellen (1) und (2) ist eine Pumpe eingebaut. Wir erinnern uns: Eine Pumpe ist eine Arbeitsmaschine, die dem Fluid Arbeit und damit Energie zuführt. Das Fluid strömt von (1) durch die Pumpe und verlässt diese bei (2) auf gleicher geodätischer Höhe.

Da die Strömungsquerschnitte vor und nach der Pumpe gleich sind, strömt das Fluid auch mit der gleichen Geschwindigkeit. Daraus folgt, dass der dynamische Druckanteil bei (1) und (2) gleich sein müssen. Schauen wir uns die Energiegleichung (Bernoulli-Gleichung) an, stellen wir fest, dass nun der statische Druck anders sein muss. Durch die Energiezufuhr ist also der Druck gestiegen.



- (1) und (2) sind auf gleicher geodätischer Höhe z. → $z_1 = z_2$
- $A_1 = A_2$ → $w_1 = w_2$

Wir bauen jetzt die **Bernoulli-Gleichung** für diese Situation auf. Es folgt stets folgendem Schema – und das ist unabhängig davon, ob es sich um eine Energiezufuhr oder Energieabfuhr handelt:

$$(1) + \text{Energiezufuhr/Energieabfuhr} = (2)$$

also

$$\underbrace{\text{Anfangszustand} + \text{Energiezufuhr/Energieabfuhr}}_{\textbf{stromaufwärts}} = \underbrace{\text{Endzustand}}_{\textbf{stromabwärts}}$$

Wir bilanzieren die Anlage im obenstehenden Tafelbild nur zwischen (1) und (2) und erhalten für die **Bernoulli-Gleichung** in der Grundform, also mit Energieströmen (Leistung):

$$\frac{\dot{m}}{2} w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\varrho} p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 + P_M = \frac{\dot{m}}{2} w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\varrho} p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2$$

Wir erinnern uns, dass die Leistung das Produkt aus dem Massenstrom und der spezifischen technischen Arbeit $P_M = \dot{m} \cdot w_{t12}$ ist.

Teilen wir die Gleichung durch den Massenstrom $\dot{m}$, erhalten wir die Geschwindigkeitsform (Form der spezifischen Energie):

$$\underbrace{\cancel{\frac{w_1^2}{2}} + \frac{p_1}{\rho} + \cancel{g \cdot z_1}}_{(1)} + \underbrace{w_{t12}}_{\substack{\text{spezif. Energiezufuhr} \\ \text{(spezif. Stutzenarbeit)}}} = \underbrace{\cancel{\frac{w_2^2}{2}} + \frac{p_2}{\rho} + \cancel{g \cdot z_2}}_{(2)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p_1}{\rho} + w_{t12} = \frac{p_2}{\rho} \Rightarrow w_{t12} = \underbrace{Y}_{\text{Spezifische Stutzenarbeit}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad \left[\frac{J}{kg}\right] = \left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

Wir führen hier also den Begriff **Spezifische Stutzenarbeit** Y ein. Stutzen deshalb, weil wir die Energieströme zwischen Eintrittsstutzen und Austrittsstutzen betrachten. Es handelt sich bei dem Term um das Verhältnis der Druckänderung, die durch die Maschine verursacht wird, zur Dichte des Fluids.

Wir erkennen:

- Wenn $p_2 > p_1$, dann ist die spezifische Stutzenarbeit positiv → $Y(+)$ Arbeitsmaschinen (Energiezufuhr): Pumpe
- Wenn $p_2 < p_1$, dann ist die spezifische Stutzenarbeit negativ → $Y(-)$ Kraftmaschinen (Energieabfuhr): Turbine, Hydraulikmotor

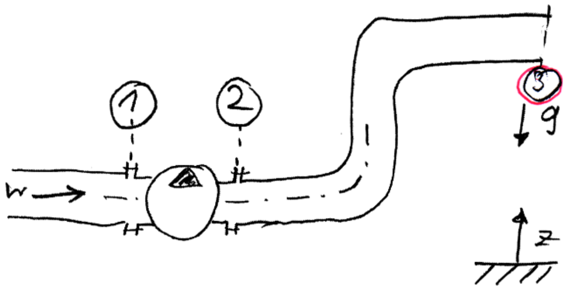
Die erforderliche mechanische Leistung der Pumpe ohne innere Verluste erhält man, indem man die spezifische Stutzenarbeit mit dem Massenstrom multipliziert:

$$P_M = \dot{m} \cdot w_{t12} = \dot{m} \cdot Y = \dot{V} \cdot \rho \cdot Y \quad \left[\frac{\cancel{kg}}{s}\frac{J}{\cancel{kg}} = W\right]$$

$$= \dot{V} \cdot \Delta p_{12}$$

$$Y = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \rightarrow Y \cdot \rho = \Delta p_{12}$$

Da der Volumenstrom der Massenstrom, dividiert durch die Dichte, ist, erhalten wir diese einfache Gleichung für die Leistung, in der Volumenstrom und Druckänderung miteinander multipliziert werden. Das kennt man vielleicht aus der Hydraulik. Die Gleichung gilt jedoch ausschließlich für inkompressible Fluide.



Jetzt wollen wir wieder die Skizze von Seite 5-2 zugrunde legen (hier rechts das Wesentliche). Wir bilanzieren jetzt zwischen (1) und **(3)**. In dem System strömt das Fluid von (1) durch die Pumpe hinauf in eine höhere geodätische Höhe und erreicht bei (3) den gleichen Druck wie zuvor bei (1). Also hat die Pumpe offenbar dazu gedient, Energie (Arbeit) zur Überwindung des Höhenunterschieds bereitzustellen.

Haben Sie auch schon einmal im Zusammenhang mit Pumpen von der sogenannten **Förderhöhe** gehört? Genau das steckt hier in diesem System. Die Bernoulli-Gleichung zwischen (1) und (3) liefert:

$$\cancel{\frac{w_1^2}{2}} + \cancel{\frac{p_1}{\rho}} + g\cdot z_1 + w_t = \cancel{\frac{w_3^2}{2}} + \cancel{\frac{p_3}{\rho}} + g\cdot z_3$$

Gekürzt, da...

mit $p_3 = p_1 \qquad w_3 = w_1$

Da die Drücke bei (1) und (3) gleich sein sollen und aufgrund des gleichen Strömungsquerschnitts in (1) und (3) auch die gleichen dynamischen Drücke herrschen müssen, bleibt nur ein Unterschied in der geodätischen Höhe. Für w_t und damit für die spezifische Stutzenarbeit Y bleibt nur

$$w_t = Y = g\cdot(z_3 - z_1)$$

und mit $H = z_3 - z_1$

$$\Downarrow$$

$$Y = g\cdot H$$

Damit ergibt sich für die Pumpe, also von (1) nach (2), also was die Pumpe zu leisten hat:

Beispiel 12

$$\boxed{\text{Förderhöhe } H = \frac{Y}{g} \qquad \text{(geodätische Höhendifferenz für } \{p, w\} = \text{konst.)} \quad H = \frac{\Delta p_{12}}{\rho\cdot g}}$$

mit $Y = \frac{\Delta p_{12}}{\rho}$

$$P_M = \dot{m}\cdot Y = \dot{m}\cdot g\cdot H = \dot{V}\cdot\Delta p$$

Die Pumpenleistung ist also mit der **Förderhöhe** verknüpft. Je höher die auf der Pumpe angegebene Förderhöhe ist, umso höher ist der Druck, den die Pumpe aufbringen kann – wissen Sie noch, der Druck, der aufgrund der **Hydrostatik** bei einem Höhenunterschied entsteht.

Wirkungsgrad der Pumpe

Der Wirkungsgrad ist in jedem Fall das Verhältnis der Nutzenergie/Nutzarbeit/Nutzleistung zur aufgewendeten Energie/Arbeit/Leistung. Bei einer Pumpe ist die Nutzleistung diejenige, die das Fluid tatsächlich erhalten hat, hier P_M. Die Indizierung kann im Übrigen abweichen. Es gibt keine Norm.

Die aufgewendete Leistung an einer Pumpe ist die Wellenleistung, die Leistung, die der Antrieb an die Pumpenwelle abgeben muss, um die Nutzleistung zu erhalten. Diese Größe wird einfach P genannt. Auch hier sind Abweichungen möglich. Die Indizierung hängt meistens von der Nomenklatur in der Aufgabenstellung ab.

(im Fluid angekommene)

Wichtig $$\eta = \frac{\text{Ans Fluid übergebene Leistung}}{\text{Antriebsleistung}}$$

Für den Wirkungsgrad der Pumpe schreiben wir dann:

$$\eta_P = \frac{P_M}{P}$$

P_M – Leistung ins Fluid

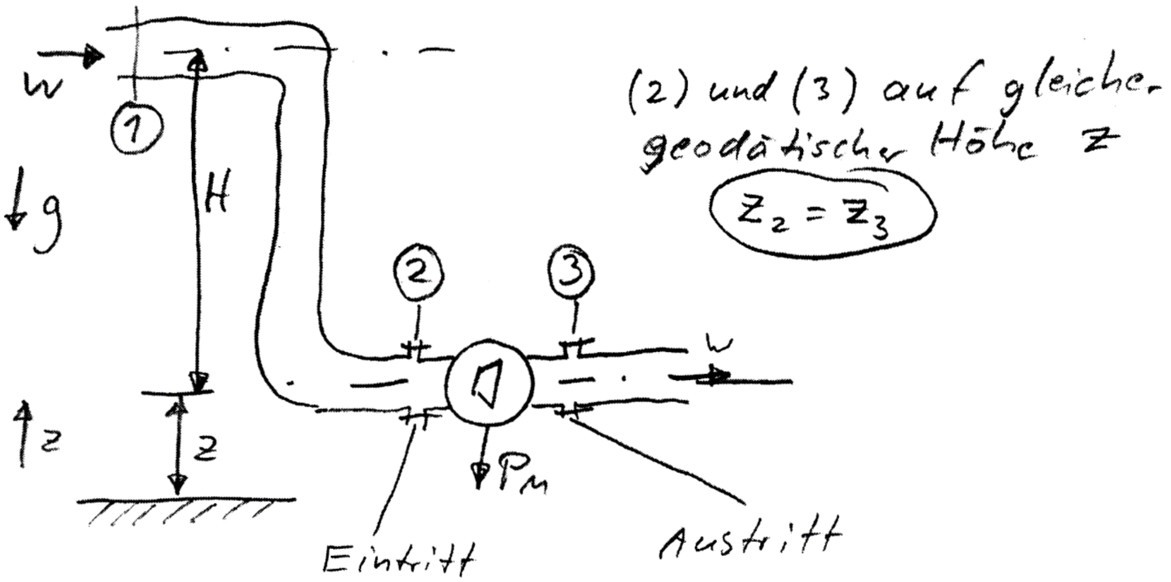
P – Wellenleistung

$$\eta_P = \frac{P_M}{P} = \frac{\dot{m} \cdot Y}{P} = \frac{\dot{m} \cdot g \cdot H}{P} \leq 1$$

P – großes P

(Indizierung kann abweichen)

Energieabfuhr (dem strömenden Fluid entnommen):



$A_2 = A_3 = A_1$

$\Downarrow$

$w_1 = w_2 = w_3$

Wie zuvor betrachten wir ein Rohrleitungssystem mit gleichen Strömungsquerschnitten in den Rohrleitungsabschnitten und damit an den Stellen (1), (2) und (3). Diesmal strömt das Fluid von (1) nach (3) abwärts und durchströmt dabei eine Turbine. Der Druck an (1) und (3) soll wiederum gleich sein.

Die **Bernoulli-Gleichung** für dieses System folgt wieder einem ähnlichen Schema wie bei der Energiezufuhr (siehe Seite 5-2). Hier ziehen wir nur stattdessen die Energie ab, also Energieabfuhr aus dem Fluid:

$$(1) - \text{Energieabfuhr} = (3)$$

also

$$\underbrace{\text{Anfangszustand} - \text{Energieabfuhr}}_{\textbf{stromaufwärts}} = \underbrace{\text{Endzustand}}_{\textbf{stromabwärts}}$$

In der Geschwindigkeitsform (spezifische Energie) erhalten wir die **Bernoulli-Gleichung** zwischen (2) und (3), also zwischen den Stutzen:

$$\underbrace{\cancel{\frac{w_2^2}{2}} + \frac{p_2}{\rho} + \cancel{g \cdot z}}_{(2)} \underbrace{- w_{t23}}_{\substack{\text{spezif. Energieabfuhr} \\ \text{(spezif. Stutzenarbeit)}}} = \underbrace{\cancel{\frac{w_3^2}{2}} + \frac{p_3}{\rho} + \cancel{g \cdot z}}_{(3)}$$

$w_2 = w_3$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p_2}{\rho} - w_{t12} = \frac{p_3}{\rho} \quad \Rightarrow w_{t23} = -\frac{p_3 - p_2}{\rho} = -Y$$

spezif. Stutzenarbeit

Wir erkennen wieder (siehe Seite 5-3):

- Wenn $p_3 > p_2$, dann ist die spezifische Stutzenarbeit positiv → $Y(+)$
  Arbeitsmaschinen (Energiezufuhr): Pumpe
- Wenn $p_3 < p_2$, dann ist die spezifische Stutzenarbeit negativ → $Y(-)$
  Kraftmaschinen (Energieabfuhr): Turbine, Hydraulikmotor

Die vom Fluid an die Kraftmaschine übergebene Leistung (nicht die Wellenleistung) erhält man wie folgt:

$$\cancel{\frac{w_1^2}{2}} + \cancel{\frac{p_1}{\rho}} + g \cdot z_1 + w_t = \cancel{\frac{w_3^2}{2}} + \cancel{\frac{p_3}{\rho}} + g \cdot z_3$$

mit $p_1 = p_3$ $\quad w_1 = w_3$ $\quad H = z_1 - z_3$

$$\Downarrow$$

$$w_t = -Y = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Fallhöhe} & H = \dfrac{w_t}{g} = \dfrac{-Y}{g} \\ \text{(geodätische Höhendifferenz für } \{p, w\} = \text{konst.)} & H = \dfrac{\Delta p_{12}}{\rho \cdot g} \end{array}} \quad \text{mit } -Y = \frac{\Delta p_{23}}{\rho}$$

Das Tafelbild auf der vorigen Seite zeigt, dass bei einer Kraftmaschine $w_t = -Y$ ist. Hier wird dann als Pendant zur Förderhöhe der Begriff Fallhöhe eingeführt. Aus der Angabe der Fallhöhe können Sie zum Beispiel auf die Arbeitsfähigkeit einer Wasserturbinenanlage schließen.

Wirkungsgrad der Kraftmaschine (Turbine)

Der Wirkungsgrad ist auch in diesem Fall das Verhältnis der Nutzleistung zur aufgewendeten Leistung. Bei einer Kraftmaschine besteht die Nutzleistung in der an der Welle ankommenden Leistung P. Die aufgewendete Leistung ist die vom Fluid an die Maschine übergebene Leistung P_M, also die Leistung, die nach Passieren der Kraftmaschine dem Fluid fehlt.

$$\eta_T = \frac{\text{Abtriebsleistung}}{\text{Aus dem Fluid übernommene Leistung}}$$

Damit gilt für den Wirkungsgrad einer Kraftmaschine:

$$\eta_T = \frac{P}{-P_M} = \frac{P}{\dot{m} \cdot Y}$$

Wellenleistung

Fluidleistung

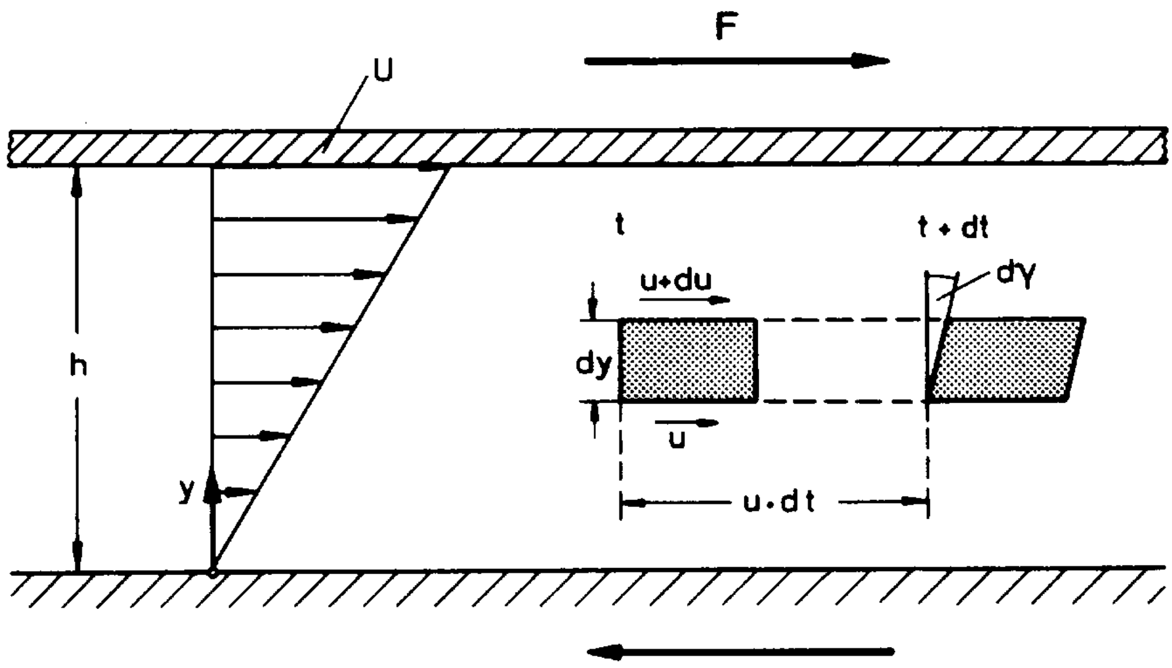
$$\eta_T = \frac{P}{-P_M} = \frac{P}{\dot{m} \cdot Y} = \frac{P}{\dot{m} \cdot g \cdot H} \leq 1$$

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *EoV –Energie- und Massenerhaltungssatz ohne Verluste* zu finden.

6 Viskosität

Bevor wir mit der **Bernoulli-Gleichung mit Verlusten** fortfahren können, müssen wir uns noch mit der Entstehung der Verluste befassen. Betrachten wir als erstes das Tafelbild in der Mitte der Seite.

Bisher haben wir angenommen, dass sich das Fluid ähnlich homogen durch ein Rohrleitungssystem bewegt, als wäre das Fluid eine mehr oder weniger feste knetbare Masse. Das heißt, die ganze Berechnung mit der Energiegleichung unterstellt eigentlich, dass an jeder Stelle im Strömungsquerschnitt die gleiche Strömungsgeschwindigkeit herrscht.



Die Abbildung hier oben deutet an, was wirklich geschieht. Das Bild zeigt als festgehaltenen Moment, wie eine Platte (oben) mit der Geschwindigkeit u von links nach rechts bewegt wird. Die untere Fläche steht fest. Dabei stellt sich das dargestellte Bild der Geschwindigkeiten der Fluidteilchen dar. Dabei geben die Pfeillängen die Geschwindigkeit dar.

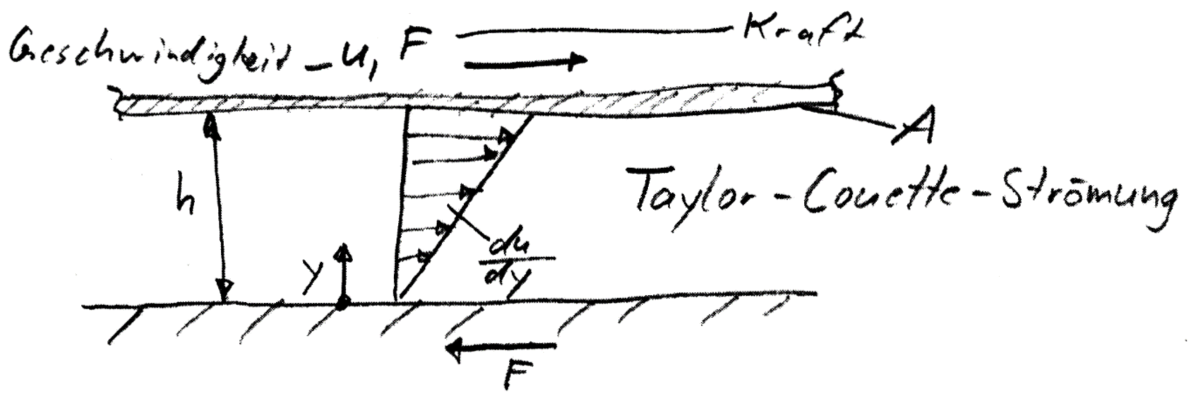
Wir als ruhende Beobachter sehen, dass sich Fluidteilchen die sich näher an der unteren (feststehenden) Fläche befinden, langsamer von links nach rechts bewegen als die Fluidteilchen, die näher an der sich bewegenden Fläche sind. Im Allgemeinen gilt, dass die Fluidteilchen **an einer Wand stets die Geschwindigkeit null** besitzen.

Wenn wir uns vorstellen, dass wir uns mit der Platte nach rechts bewegen (mitbewegtes Koordinatensystem), beobachten wir, dass die flächennahen Fluidteilchen sich mit uns (mit der Platte) bewegen, also die Geschwindigkeit null besitzen, und die Teilchen an der feststehenden Fläche, die sich von uns (bewegt von links nach rechts) aus betrachtet nach links bewegt, eben mit der Geschwindigkeit von uns nach links bewegen.

Haftbedingung: Am Rande haben die Flüssigkeitsteilchen die gleiche Geschwindigkeit wie die Platte.

Die sich zwischen den Flächen ausbildende Strömung wird **Taylor-Couette-Strömung** genannt (eigentlich zwischen zwei koaxialen zylindrischen Flächen). Vorausgesetzt wird ein inkompressibles Fluid und eine Eigenschaft die wir jetzt herausarbeiten.

Um die obere Fläche von links nach rechts mit konstanter Geschwindigkeit bewegen zu können, ist eine Kraft erforderlich. Es entsteht ein **Widerstand**. Das Verhältnis aus der erforderlichen Kraft F und der Fläche A nennen wir die **Schubspannung** τ.

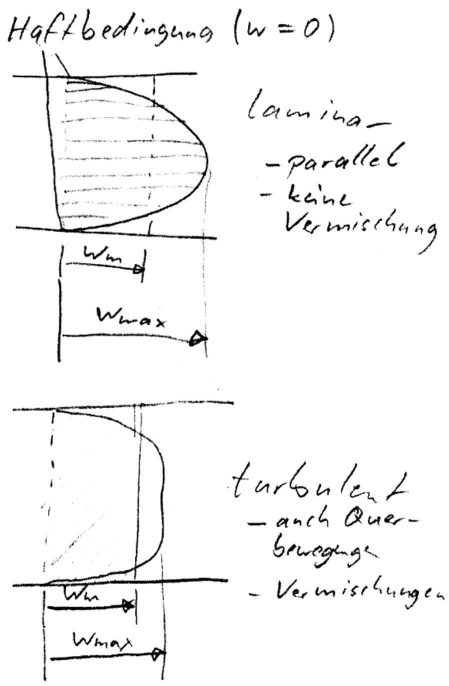


Schubspannung τ — Verhältnis Schubkraft/Fläche

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \left[\frac{N}{m^2}; Pa\right]$$

Die Schubspannung erhält dadurch die Dimension eines Drucks.

Dass die reale Strömung in der Realität anders verläuft als die nur theoretische homogene Geschwindigkeitsverteilung, haben Sie vielleicht schon im Laborversuch erfahren können (nicht im Corona-Semester). In der nebenstehenden Skizze sind die Verläufe für die sogenannte **laminare** und **turbulente** Strömung illustriert. Die Begriffe behandeln wir noch im Abschnitt 8.1 ab Seite 8-2.



In der obigen Skizze sehen Sie noch

$$\frac{du}{dy}$$

Dabei handelt es sich um den Geschwindigkeitsgradienten, also um die Änderung der Geschwindigkeit der Fluidteilchen in y-Richtung, also über der Höhe h.

Folgender Zusammenhang besteht zwischen der Schubspannung τ und dem Geschwindigkeitsgradienten $\frac{du}{dy}$:

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy}$$

Verläuft die Schubspannung in y-Richtung linear, handelt es sich bei dem Fluid um ein **Newtonsches Fluid** wie Wasser, Öl usw. → Newtonsches Reibungsgesetz.

Ist der Verlauf nichtlinear, handelt es sich dementsprechend um ein **nichtnewtonsches Fluid**. Ein Beispiel dafür ist die mit etwas Wasser angerührte Speisestärke. Vielleicht haben Sie damit schon einmal gespielt. Durchsuchen Sie ruhig mal das Internet danach ☺.

In der obigen Gleichung haben Sie vielleicht schon den Proportionalitätsfaktor η (griechisches eta, bitte nicht mit dem Wirkungsgrad – ebenfalls η – verwechseln!) entdeckt. Hier im folgenden Tafelbild ist die obige Gleichung über die gesamte Höhe h dargestellt:

$u(y)$ linear

$$\tau = \eta \cdot \frac{u}{h}$$

y erstreckt sich über h

η: Proportionalitätsfaktor, stoff- und temperaturabhängig

Wenn wir die Gleichung mal nach η umstellen, erhalten wir:

Dimension/Einheit

$$\eta = \underbrace{\tau}_{\frac{N}{m^2}} \cdot \frac{\overbrace{h}^{m}}{\underbrace{u}_{\frac{m}{s}}} \quad \left[\frac{N \cdot \cancel{m} \cdot s}{m^2 \cdot 1 \cdot \cancel{m}} = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s\right]$$

Dieser Proportionalitätsfaktor η erhält die Dimension $[\mathrm{Pa\ s}]$. Wir nennen ihn ab jetzt **dynamische Viskosität**.

Je höher der Betrag der dynamischen Viskosität ist, umso zäher ist das Fluid. Luft hat also eine geringe Viskosität, kaltes Motoröl eine eher hohe. Hier sind ein paar Werte:

- $\eta_{Wasser\ 20°C} = 1\ \mathrm{mPa{\cdot}s}$
- $\eta_{Hg} = 1{,}55\ \mathrm{mPa{\cdot}s}$

Es gibt noch eine andere Viskosität. Die dynamische Viskosität η, bezogen auf die Dichte, also dividiert durch die Fluiddichte ϱ ist:

$N \cdot s \cdot m^{-2}$

Kinematische Viskosität $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$

$\frac{kg}{m^3}$

$$\left[\frac{\cancel{N}\cdot\cancel{s}\cdot m^{\cancel{3}\,2}\cdot\cancel{kg}\cdot\cancel{m}}{\cancel{m^2}\cdot\cancel{kg}\cdot s^{\cancel{2}}\cdot\cancel{N}} = \frac{m^2}{s}\right]$$

$\Downarrow$

Nu. Newtonsche Fluide

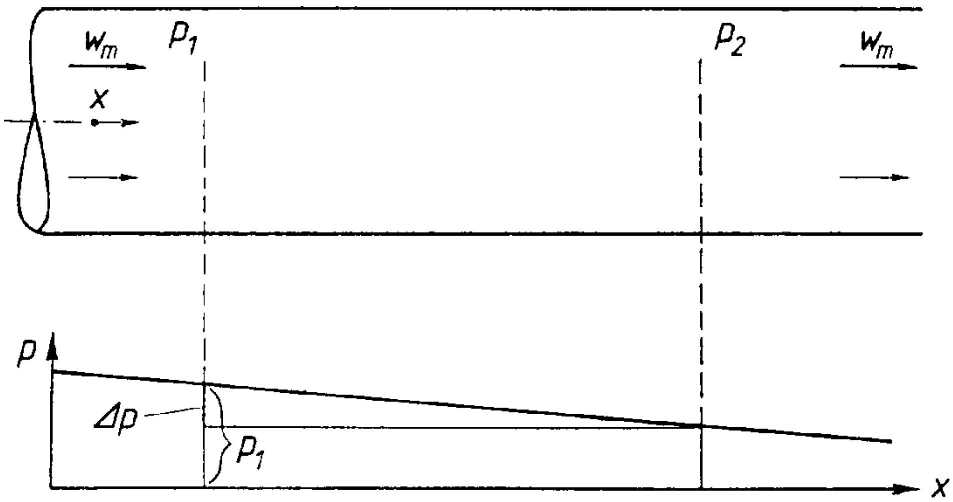
Die **kinematische Viskosität** ν (griechisches ny) erhält die Dimension $\left[\frac{m^2}{s}\right]$.

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *W –Widerstands- und Auftriebskräfte* zu finden.

7 Inkompressible reibungsbehaftete Strömung ohne Energiezufuhr

7.1 Druckverlust

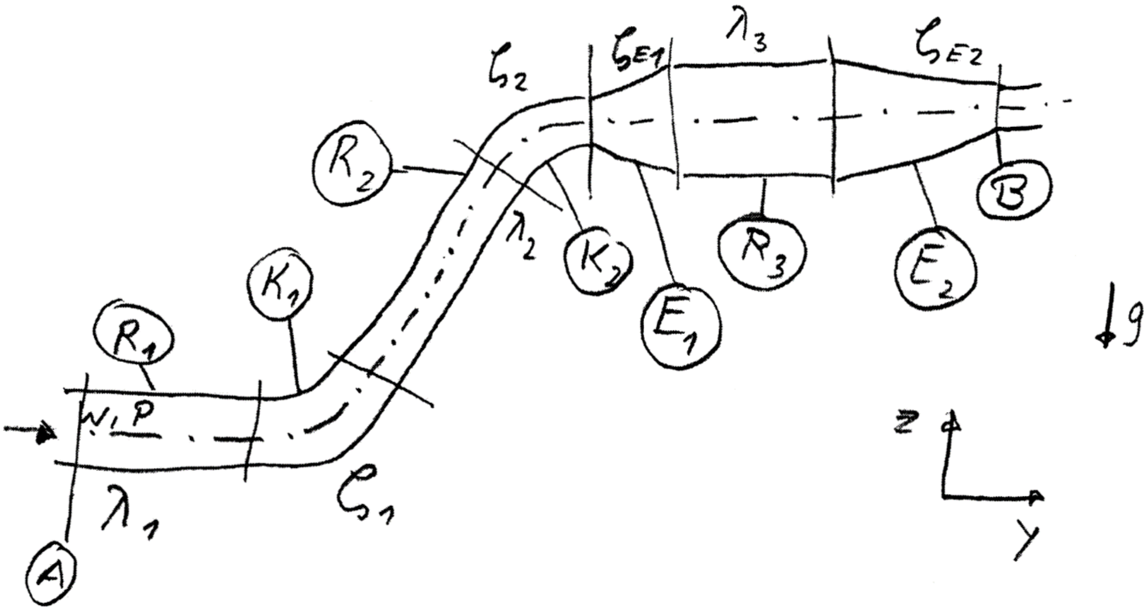
In den Kapiteln 4 und 5 haben wir uns zunächst mit Strömungsvorgängen ohne Reibung befasst. Hier führen wir die reibungsbehaftete Strömung ein. In der folgenden Abbildung ist im oberen Teil eine Rohrströmung von links nach rechts mit der mittleren Geschwindigkeit w_m angedeutet.



Der untere Bildteil zeigt den Verlauf des Drucks über der Länge in x-Richtung. Durch die Reibung, die in der Strömung entsteht (siehe Kapitel 6) entsteht ein Druckabfall. Das heißt, dass Druckenergie „verloren geht“. Durch die Reibung wird irreversibel Wärme produziert. Die Energie, die vorher – hier an der Stelle (1) – noch vorhanden war, fehlt als Druckenergie, besteht jetzt jedoch als Wärmeenergie fort. Dies äußert sich durch einen Temperaturanstieg in einer reibungsbehafteten Strömung.

Die Energie bleibt erhalten und muss auch genauso bilanziert werden. Energie geht also nicht verloren. Tatsächlich geht aber nutzbarer Druck verloren. Wir bezeichnen dies auch als **Druckverlust**.

Jetzt können wir das in einer Strömung durch ein Rohrleitungssystem anwenden. Bitte werfen Sie einen Blick auf das Tafelbild auf der nächsten Seite.



Wir sehen hier ein Rohrleitungssystem ohne Energiezu- oder -abfuhr, dafür aber mit Höhenunterschied und insbesondere mit geraden Rohrabschnitten, Rohrbögen, Erweiterungen und Verengungen. Das sind auch gleich die Elemente, die wir rechnerisch als Verursacher des Druckverlustes behandeln.

In inkompressiblen Strömungen gilt für die durströmten Querschnitte A an Ein- und Austritt:

- Düse = Verengung → $A_{aus} < A_{ein}$
- Diffusor = Erweiterung → $A_{aus} > A_{ein}$

Betrachten wir die Bernoulli-Gleichung: Wir bilanzieren auf der linken Gleichungsseite den Ausgangszustand und auf der rechten den Endzustand. Wir haben schon festgestellt, dass nutzbarer Druck fehlt. Damit die Gleichung erfüllt ist, fügen wir den Verlust hinzu:

$$\frac{\dot{m}}{2} w_A^2 + \frac{\dot{m}}{\varrho} p_A + \dot{m} \cdot g \cdot z_A = \frac{\dot{m}}{2} w_B^2 + \frac{\dot{m}}{\varrho} p_B + \dot{m} \cdot g \cdot z_B + \text{Verluste}$$

⇓ Druckform

$$\frac{\varrho}{2} w_A^2 + p_A + \varrho \cdot g \cdot z_A = \frac{\varrho}{2} w_B^2 + p_B + \varrho \cdot g \cdot z_B + \underbrace{\Delta p_{V,AB}}_{\text{Druckverlust}}$$

⇓ Geschwindigkeitsform (Druckform $\cdot \frac{1}{\varrho}$)

$$\frac{w_A^2}{2} + \frac{p_A}{\varrho} + g \cdot z_A = \frac{w_B^2}{2} + \frac{p_B}{\varrho} + g \cdot z_B + \varphi_{AB}$$

Bei der Geschwindigkeitsform, die eigentlich die Form der spezifischen Energien ist, bezeichnen wir die Verluste als spezifische Dissipation φ_{AB}:

$$\varphi_{AB} = \frac{\Delta p_{V,AB}}{\varrho} \quad \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$$

Quantitativ werden Verluste durch Verlustzahlen gekennzeichnet:

- Gerader Rohrabschnitt: λ
- Rohrleitungselemente (Krümmer/Rohrbögen, Diffusoren, Düsen): ζ (zeta)

Sie sehen: Wir unterscheiden nur **gerade Rohrabschnitte** (keine Richtungsänderung, keine Änderung des Strömungsquerschnitts → nur Reibung) und **Rohrleitungselemente**. Die Erfassung der Druckverluste muss immer als Ganzes erfolgen. Das werden Sie auch bei der Lösung der Übungsaufgaben bemerken. Allgemein gilt bei der Durchströmung mehrerer Abschnitte in einem Rohrleitungssystem immer die Summe aller Verluste. **Achtung, das ist jetzt wichtig!**

$$\varphi_{ges} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

Länge des Rohrabschnitts

$$\varphi_{ges} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{w_i^2}{2}\right)}_{\text{Summe aller Rohrabschnitte}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i \cdot \frac{w_i^2}{2}\right)}_{\text{Summe aller Rohrleitungselemente}}$$

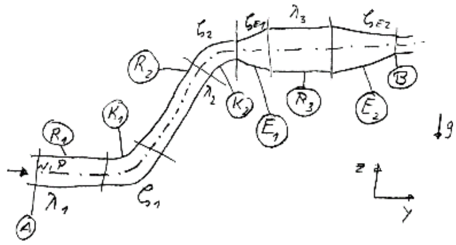
$\varnothing$

$\Downarrow$

als Druckverlust

$$\Delta p_{V,ges} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{\varrho}{2} w_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i \cdot \frac{\varrho}{2} w_i^2\right)$$

Wir betrachten also immer alles von der einen Stelle (A) bis (B) als Ganzes. Die nebenstehende Zeichnung ist die gleiche wie auf Seite 7-2 oben.



Auf der folgenden Seite finden Sie eine Tabelle, die Längen l_i, Durchmesser d_i und Verlustzahlen λ_i und ζ_i auflistet. Das ist die Grundlage zur Aufstellung der Druckverluste $\Delta p_{V,AB}$ und damit zur Vervollständigung der **Bernoulli-Gleichung mit Verlusten**. Das müssen Sie bei den Berechnungsaufgaben anwenden!

	Länge	Durchmesser	Verlustzahl
R_1	l_1	d_1	λ_1
K_1			ζ_1
R_2	l_2	d_2	λ_2
K_2			ζ_2
E_1			ζ_{E1}
R_3	l_3	d_3	λ_3
E_2			ζ_{E2}

Unsere **Bernoulli-Gleichung** für den dargestellten Fall heißt dann:

$$\frac{\varrho}{2} w_A^2 + p_A + \varrho \cdot g \cdot z_A = \frac{\varrho}{2} w_B^2 + p_B + \varrho \cdot g \cdot z_B + \underbrace{\Delta p_{V,AB}}_{\text{Verluste stromabwärts}}$$

Für die geraden Rohrabschnitte R1, R2 und R3 schreiben wir dann:

$$\Delta p_{V,AB} = \Delta p_{V,Rohre} + \Delta p_{V,Elemente}$$

$$\Delta p_{V,Rohre} = \frac{\varrho}{2} \cdot \left(w_{R1}^2 \cdot \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} + w_{R2}^2 \cdot \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} + w_{R3}^2 \cdot \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3} \right)$$

Falls $w_{R1} = w_{R2} = w_{R3} = w_A = w_B \rightarrow$

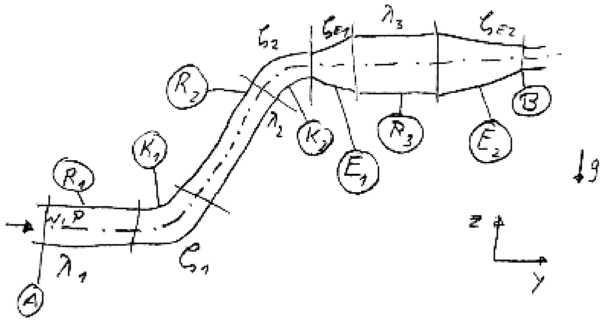
$$\rightarrow \Delta p_{V,Rohre} = \varrho \frac{w_A^2}{2} \cdot \left(\lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} + \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3} \right)$$

Wenn die Rohre von gleicher Qualität hinsichtlich Material und Rauigkeit sind, was in den meisten Fällen zutrifft, können wir eine Vereinfachung vornehmen:

Falls gleiche Rohre $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \rightarrow$

$$\rightarrow \Delta p_{V,Rohre} = \varrho \frac{w_A^2}{2} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{l_1}{d_1} + \frac{l_2}{d_2} + \frac{l_3}{d_3} \right)$$

Unser Rohrleitungssystem enthält folgende Rohrleitungselemente: Krümmer (Rohrbogen) K1, Krümmer K2, Erweiterung (Diffusor) E1 und Verengung (Düse) E2.



Der Druckverlust für alle Rohrleitungselemente lautet dann:

$$\Delta p_{V,Element} = \frac{\rho}{2} \cdot \left(w_{R1}^2 \cdot \zeta_1 + w_{R2}^2 \cdot \zeta_2 + w_{R2}^2 \cdot \zeta_{E1} + w_{R3}^2 \cdot \zeta_{E2} \right)$$

Krümmereintritt

Krümmereintritt

Diffusoreintritt

Düseneintritt

Man muss das wirklich genauso machen: Zuerst alle Elemente erfassen, dann in die Bernoulli-Gleichung einsetzen und versuchen, einige der Geschwindigkeiten zu eliminieren. Wenn Sie zum Beispiel nach der Austrittsgeschwindigkeit bei (B) suchen würden, sollten Sie, nachdem Sie die vollständige Bernoulli-Gleichung aufgestellt haben, versuchen nur noch die Geschwindigkeit w_B in der Gleichung zu finden.

Jetzt noch ein paar Worte, wie wir zu den Verlustzahlen λ und ζ kommen. Einige Zahlen kann man berechnen. In der Regel ist jedoch zur Ermittlung der Verlustzahlen eine empirische Methode erforderlich. In den Berechnungsaufgaben sind Verlustzahlen entweder gegeben oder müssen aus dem bekannten Druckverlust berechnet werden, was im Übrigen die empirische Methode grob beschreibt.

7.2 Reynolds-Zahl Re

Eine bedeutende Ähnlichkeitskennzahl ist die Reynolds-Zahl Re. Sie ist wie folgt definiert:

$$Re = \frac{\rho \cdot w \cdot d}{\eta} = \frac{w \cdot d}{\nu}$$

mit d – charakteristische Länge, bei Rohrströmungen der Durchmesser d

Mit der charakteristischen Länge d ist bei Durchströmungen der **Äquivalenzdurchmesser** d (bei kreisrunden Querschnitten genau der Durchmesser, bei z. B. Rechteckquerschnitten der fiktive Durchmesser, der dem tatsächlichen Strömungsquerschnitt entspricht) gemeint, bei Umströmungen die Länge in Strömungsrichtung.

Re ist eine Ähnlichkeitskennzahl, von der die kritische Reynolds-Zahl mit $Re_{kr} = 2320$ definiert wurde. Die kritische Reynolds-Zahl markiert den Umschlagpunkt zwischen laminarer und turbulenter Strömung (siehe Kapitel 8 ab Seite 8-1):

$\boldsymbol{Re \leq 2320}$ → **laminare Strömung**

$\boldsymbol{Re > 2320}$ → **turbulente Strömung**

Bei laminarer Rohrströmung lässt sich die Verlustzahl theoretisch berechnen, was bei der turbulenten Strömung nicht mehr der Fall ist:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

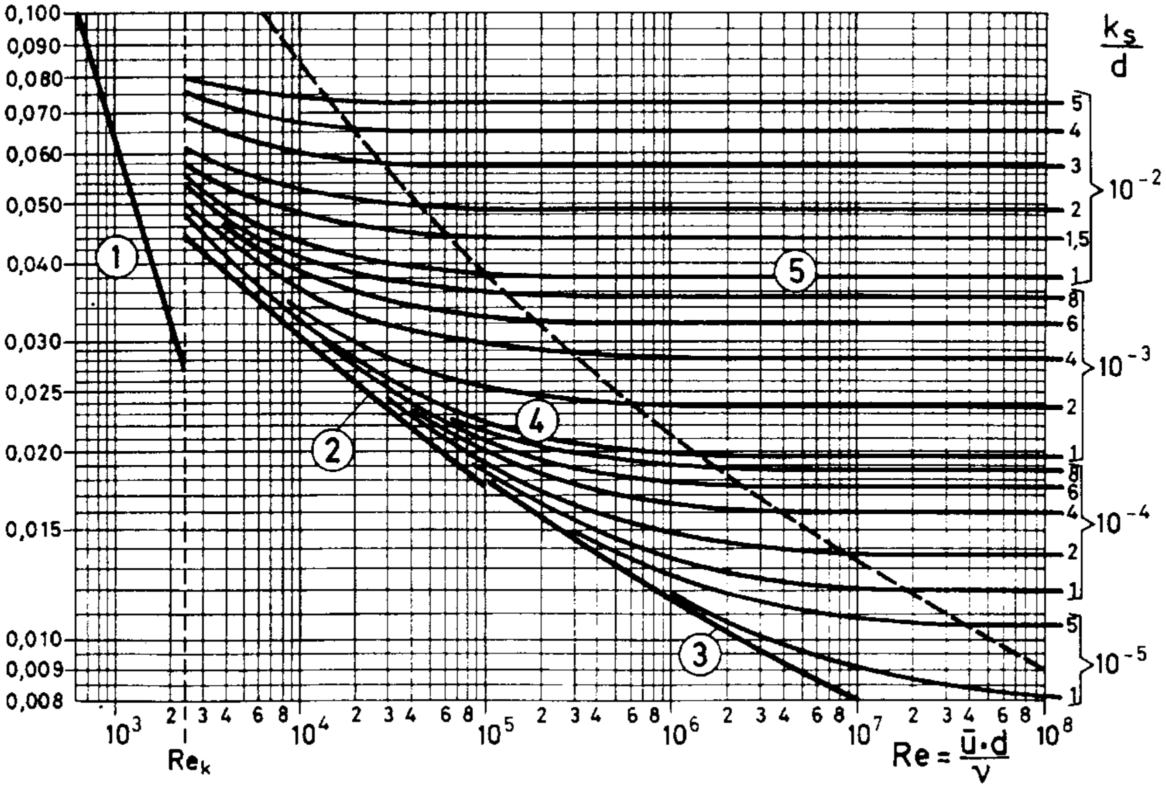
Die Herleitung dafür arbeiten Sie bitte im Vorlesungsskript im Abschnitt 7.5 *Reibungsbehaftete Rohrströmung* ab Seite 7-20 durch.

Unabhängig davon, ob die Verlustzahl λ theoretisch berechenbar ist oder nicht, gilt für alle Strömungen – laminar und turbulent:

$$\Delta p_V = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\varrho}{2} w^2$$

7.3 Rohrreibungszahlen

Das folgende Diagramm zeigt die Verlustzahl λ für verschiedene Geltungsbereiche:



Übrigens müssen Sie die folgenden Gleichungen nicht auswendig kennen. Es reicht, wenn Sie wissen, wo Sie sie nachschlagen können ☺!

Bereich (1) – Hagen-Poiseuille: Laminar, hydraulisch glatt, $\boldsymbol{Re} < \mathbf{2320}$

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re}$$

Bereich (2) – Blasius: Turbulent, hydraulisch glatt, $\mathbf{2320} < \boldsymbol{Re} < \mathbf{10^5}$

$$\lambda_{turb} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}}$$

Bereich (3) – Prandtl: Turbulent, hydraulisch glatt, $\mathbf{10^5} < \boldsymbol{Re} < \mathbf{10^7}$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 2{,}03 \cdot \log\left(Re \cdot \sqrt{\lambda_{turb}}\right) - 0{,}8$$

Bereich (4) – Colebrook: Turbulent, mit Rauigkeit

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 1{,}74 - 2 \cdot \log\left(\frac{2\,k_S}{d} + \frac{18{,}7}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{turb}}}\right)$$

Bereich (5) – von Karman-Nikuradse: Turbulent, mit Rauigkeit, unabhängig von $\boldsymbol{Re}$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 1{,}74 - 2 \cdot \log\frac{2\,k_S}{d}$$

- Kurve 1 (Bereich (1)) entspricht der laminaren Strömung $Re < Re_{kr}$.
- Die Kurven 2 und 3 gelten, wenn die Rauigkeit keinen Einfluss hat (das Rohr hydraulisch glatt ist), bei Kurve 2 bis $Re = 10^5$.
- Bei Reynolds-Zahlen über 10^5 gilt Kurve 3. Die Rauigkeit ist so klein, dass sie den Rohrwiderstand nicht beeinflusst. Man bezeichnet die Wand dann als hydraulisch glatt.
- Ist die Rauigkeit k_S groß genug, um die Rohrreibung zu beeinflussen, sind wieder zwei Bereiche zu unterscheiden. Im Bereich (4) hängt λ sowohl von der Reynolds-Zahl als auch von der relativen Sandrauigkeit k_S/d ab.
- Im Bereich (5) ist der Widerstand von der Viskosität praktisch unabhängig.

7.4 Druckverluste in Rohrelementen – Verlustkoeffizient

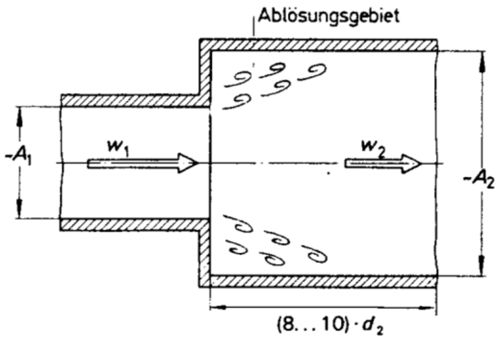
Die Grundgleichung für die Druckverluste in Rohrleitungselementen wie Rohrbögen, Düsen und Diffusoren haben Sie ja schon kennengelernt:

$$\Delta p_V = \zeta \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot w^2$$

Was jetzt folgt, ist eine Aufstellung der abgeschätzten Verlustzahlen für einige Rohrleitungselemente.

Plötzliche, sprungartige Rohrerweiterung

Wie groß ist die Verlustzahl ζ? Der Druckverlust in einer sprungartigen Rohrerweiterung folgendermaßen definiert:



$$\Delta p_V = \frac{\varrho}{2} \cdot (w_1 - w_2)^2$$

Setzt man dies in die Grundgleichung ein, erhalten wir:

$$\zeta \cdot \cancel{\frac{\varrho}{2}} \cdot w_1^2 = \cancel{\frac{\varrho}{2}} \cdot (w_1 - w_2)^2$$

Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich:

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad \rightarrow \quad w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

und damit

$$\zeta \cdot w_1^2 = \left(w_1 - w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Der Term auf der rechten Gleichungsseite ist eine binomische Formel:

$$\left(w_1 - w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = w_1^2 - 2 \cdot w_1 \cdot w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} + w_1^2 \cdot \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

$$= w_1^2 - 2w_1^2 \frac{A_1}{A_2} + w_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

$$= w_1^2 \cdot \left[1 - 2\frac{A_1}{A_2} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]$$

Diese neue rechte Gleichungsseite sieht schon wieder wie eine ausmultiplizierte binomische Formel der Form $(a-b)^2$ aus:

$$\underbrace{1^2}_{a^2} - \underbrace{1}_{a} \cdot \underbrace{2}_{2} \cdot \underbrace{\frac{A_1}{A_2}}_{b} + \underbrace{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}_{b^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Die entsprechende „geklammerte“ Variante lautet dann:

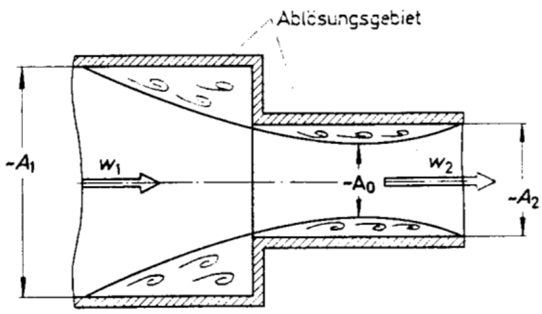
$$\zeta \cdot \cancel{w_1^2} = \cancel{w_1^2} \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

und damit die Endform:

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Diese Gleichung stellt die Widerstandszahl (Verlustzahl) ζ einer plötzlichen Rohrerweiterung dar, bezogen auf die größere Geschwindigkeit w_1 im Rohr.

Plötzliche, sprungartige Rohrverengung (Kontraktion)



Bei einer plötzlichen Verengung in der Rohrleitung tritt vor und nach der Kontraktion eine Separation der Strömung auf. Dadurch schafft sich die Strömung selbst einen glatten Übergang. Als Folge ist der minimale Querschnitt $A_0 = A_{min}$ kleiner als der tatsächliche Rohrquerschnitt A_2. Bei der plötzlichen Kontraktion wird der Druckverlust hauptsächlich durch die Expansion von A_0 auf A_2 nach der Kontraktion verursacht. Daher kann man den Druckverlust an den des Carnot-Diffusors annähern.

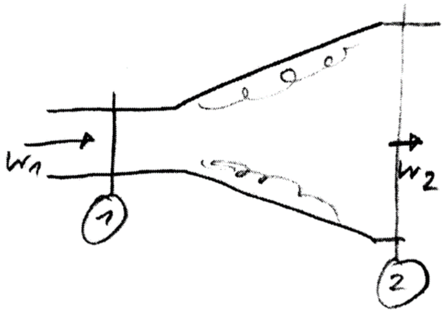
Der Druckverlust ergibt sich hier aus

$$\Delta p_V = \frac{\varrho}{2} \cdot (w_0 - w_2)^2$$

für die plötzliche Verengung mit dem „freien“ Kontraktionsquerschnitt A_0 zu

$$\zeta = \left(\frac{A_2}{A_0} - 1\right)^2$$

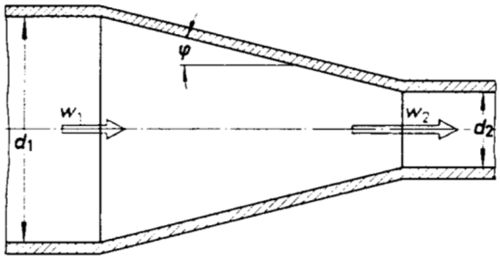
Allmähliche Rohrerweiterung (Diffusor) und allmähliche Rohrverengung (Konfusor, Düse)



Für Düsen kann die Verlustzahl ζ durch

$$\zeta = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$$

bestimmt werden. Die Verluste sind bei allmählichen Verengungen und Erweiterungen geringer als bei plötzlicheren. Bei Düsen (entspannend, statischer Druckanteil sinkt vom Eintritt zum Austritt) treten weniger Verluste auf als in einem Diffusor. Beim Diffusor (verzögernd, Druck steigt) treten leicht Ablösungen auf, die den Druckverlust verursachen.



Es muss das gesunde Maß zwischen größerem Verlust durch plötzlichere Verengung oder Erweiterung und größerem Verlust durch Reibung bei größerer Lauflänge in den Rohrleitungselementen gefunden werden. Die Konsequenzen sind:

- Düsen sind relativ leicht zu gestalten.
- Diffusoren müssen sorgfältig ausgelegt werden.
- Die Erweiterung sollte nur leicht erfolgen (Gesamtöffnungswinkel $\leq 8°$).
- Ein kleiner Erweiterungswinkel ist mit daraus folgender größerer Länge und damit verbundener Rohrreibung abzuwägen. Bei geringen Geschwindigkeiten ist ein großer Öffnungswinkel nicht so dramatisch wie bei hohen (→ gestufter Diffusor).

Die Verlustzahl bezieht sich meist auf die höhere Geschwindigkeit, kann jedoch auch anders angegeben sein.

Allgemein gilt für die Widerstandszahl (den Verlustkoeffizienten, die Verlustzahl, Verlustziffer):

Die Widerstandszahl ζ ist eine Funktion von folgenden Faktoren:

- Rohrrauigkeit
- Reynolds-Zahl Re
- des Winkels φ
- Durchmesserverhältnis $\frac{d_1}{d_2}$.

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *EmV –Energie- und Massenerhaltungssatz mit Verlusten* zu finden.

8 Widerstand

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *W –Widerstands- und Auftriebskräfte* zu finden.

9 Impulssatz für stationäre Strömungen

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *I – Anwendung des Impulssatzes* zu finden.

10 Impulsmomentensatz (Drehimpuls, Drallsatz)

Passende Übungsaufgaben sind im Bereich *I – Anwendung des Impulssatzes* zu finden.